UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Tesis Doctoral

Libros de texto de matemática en carreras de ingeniería. Un análisis estructural

Fernando Acero

Director: Dr. Mariano Palamidessi
Buenos Aires, abril 2013

Gracias, Madre de Dios por tu auxilio.
Mi profunda gratitud a mis padres,
que se sacrificaron por mí.
Y a Marcela Martins

Reconocimientos

El director de esta tesis, Mariano Palamidessi, la ha hecho posible; sus numerosas revisiones siempre me han permitido corregir el rumbo y profundizar la sustancia. Mi gratitud necesita extenderse a su calidad humana, con la ayuda pronta y el gesto amable alentando a proseguir. Mariano estuvo siempre y se lo agradeceré siempre.

Ruth Sautu supo ser una maestra con amistad, acompañando cálidamente durante tres años la transformación de los primeros borradores, con admirable claridad. Y la inmensa generosidad de abrir su casa y regalar su tiempo solo merece inmensa gratitud.

La Escuela de Educación fue el hermoso lugar donde los compañeros de doctorado y profesores compartimos un proyecto. Mis compañeros de doctorado siempre estuvieron entre lo más querible. Catalina Wainerman fue, todo el tiempo, la presencia imprescindible.

Finalmente, mi gratitud a los libros. A todos los libros.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1. Problemática

La lectura de los textos de carácter técnico del nivel universitario, en cualquier disciplina, exige una elevada competencia lectora derivada de la rigurosidad del lenguaje, lo que no permite dar por supuesta la alfabetización de sus alumnos como un estado previamente adquirido en ámbitos no universitarios. De este modo, los lectores que no cuentan con un repertorio de decodificadores para recorrer un texto son sumidos en un estado de desorientación que los conduce a una desconexión de su lectura; esa distancia entre el texto y el lector es hoy incrementada por la escasa familiaridad de la población estudiantil con los modos de buscar procesar la información en los libros de texto (Gordon 2011, Carlino 2003, Haswell y otros 1999, Carlino 2004, Poulain 2004, Carlino y Estienne 2004). Esta dificultad de lectura, por otra parte, no se limita a los textos universitarios, sino que se extiende hasta los niveles más elementales de la vida cotidiana, según el reconocido fenómeno del *iletrismo* (Chartier 2005, Poulain 2004, PISA 2010, 2011).

Si esta postulada dificultad de lectura se lleva a una posición extrema puede llegarse a una visión que presenta la utilización de los textos como una tarea poco menos que imposible. Los textos de matemática –se dice desde esta posición– son muy parecidos a un acertijo; para el historiador de la matemática Morris Kline, la mayoría de los autores suponen que la presentación de la secuencia lógica debiera ser suficiente para la comprensión del lector, al que imaginan siguiendo minuciosamente los pasos de sus pruebas; los autores –dice Kline– no sienten la necesidad de plantearle al lector los motivos por los que está procediendo de una determinada manera y cuál es la ruta general que guía y da sentido a sus razonamientos, ni por qué podría ser importante para la matemática dejar explicitados esos argumentos y no otros igualmente posibles. El mismo autor lleva al límite su postura crítica de la presentación de los textos, recordando la práctica corriente entre los matemáticos del siglo XVI de ocultar sus descubrimientos en forma de anagramas: "esta práctica persiste hoy –dice el autor– excepto que el anagrama se llama libro de texto" (Kline 1977, 121). Para Alsina (2002, 5-11), el texto sería menos que inútil, inadecuado; la gran mayoría de los libros de texto de matemática constituyen una presentación de *perfect-theory* en un estilo que asemeja las revistas especializadas de investigación, ocultando al lector la naturaleza humana de los descubrimientos matemáticos. Esa presentación, paradójicamente, reforzaría una comprensión instrumental de la matemática en menoscabo de una comprensión de las relaciones profundas entre los objetos que el libro de texto pretende exponer. Otra forma de exponer la inutilidad del texto para el alumno es concluir que no le está destinado, "puesto que la mayoría de los libros de texto típicos están escritos para satisfacer las necesidades de los profesores, no debe extrañarnos que no esperemos que los alumnos aprendan Cálculo leyéndolos" (Muller 2012, 391).Los textos, desde esta perspectiva solo resultan útiles a los profesores, y el problema de la ilegibilidad desaparece, si el lector natural ya no es un aprendiz, sino un experto en el área; ni siquiera esta capacidad está asegurada, pues los "profesores de matemática con pobre formación podrían ser incapaces de alcanzar un nivel de autonomía que les permita apreciar la pertinencia y calidad de los libros de texto" (Hogdson 2012, 507).

Como contrapartida a las posiciones anteriores, puede leerse que "seguramente estaremos de acuerdo en que la lectura de textos sigue siendo un modo privilegiado para la adquisición de conocimientos en la universidad" (Mateos 2009, 106). En esta perspectiva, los textos son ahora presentados como un recurso necesario –e insuficiente– de la enseñanza de la matemática avanzada (Nicol 2011, G. Harel 2010a), desempeñando un papel fundamental en la educación matemática, en tanto que estructuran los procesos de enseñanza y aprendizaje, con una importante influencia sobre los profesores y estudiantes (Rizvi 2009, Gatabi y Stacey 2009); se constituyen como una exposición estructurada de un cuerpo de conocimientos (Sriraman y English 2010, Johansson 2005, Mouzakitis 2006, Seguin 2012), junto a un implícito estilo didáctico (Lesh y Sriraman 2010, Valverde, y otros 2002, Boote 2010, English y Sriraman 2010) en el que predomina lo formal sobre lo intuitivo (G. Harel 2010a, Sinclair 2010). El libro de texto "guía el contenido, la organización y la estructura de la enseñanza de la matemática" (Brändstrom 2005, 20), constituyendo "la característica más importante de la enseñanza de la matemática por su estrecha relación con el aula" (Johansson 2005, 119), se configura en un entramado de notas, problemas, observaciones y actividades de manera que "se parece a un profesor en sí mismo, [contribuyendo a] forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores" (Dormolen 1986, 141). La inclusión del texto en la estructura curricular "ejerce una fuerte influencia sobre el conocimiento de la matemática asociada con la profesión de enseñar, y sobre los aprendizajes de los estudiantes" (Kessel y Ma 2012, 474).

Si bien las dos posiciones anteriores no son lógicamente excluyentes, conducirían una imposibilidad que es contradicha por la realidad misma, según transcurre en los ámbitos universitarios que incluyen la matemática. No se puede aceptar que los libros de texto de nivel universitario sean un objeto a la vez necesario e ilegible, sin admitir también la imposibilidad de la enseñanza de la matemática misma. Si el libro de texto queda fuera del alcance de su potencial lector, y ese recurso es a la vez necesario para su formación, la posibilidad misma de esa formación queda comprometida. Sin embargo, los libros de texto de matemática se siguen escribiendo y publicando; los profesores responsables de las asignaturas publican sus listados bibliográficos en sitios habilitados por las universidades que están dirigidos hacia los alumnos[1], y los autores de los libros de texto, declaran en sus prólogos lo que esperan sea su audiencia, no otra que los alumnos de las carreras de grado que se cursan en las universidades que los incluyen en sus bibliografías.

En la concepción de la corriente del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) un texto de matemática es visto como un compuesto de dos partes: una parte de matemática (axiomas, definiciones, teoremas y pruebas) y una parte que puede llamarse metamatemática, donde el autor conduce los tiempos y modos en que va presentando la información y sus motivaciones (Tall 2001, 2003, 2007a, 2012; Steenrod 1973); en el prólogo –una metamatemática de segundo orden– el autor expone sus principios de presentación. Si bien la metamatemática es más flexible que la matemática, ésta no es de ninguna manera rígida: esta tesis muestra que su inestabilidad alcanza hasta el nivel atómico de un único concepto, quedando implícito cuánto más inestable si se trata de organizarlos en niveles moleculares o de sistemas complejos consistentes. La metamatemática, por su parte, se presta a una dispersión no acotada tanto en *demandas cognitivas* como en *estilos de prosa matemática*. Cuando el autor escribe matemática, *hace* matemática; cuando escribe metamatemática, indirectamente expone un pensamiento –el suyo– acerca de la matemática.

El reconocimiento de estos aspectos permite una respuesta que está en la diagonal de las dos posiciones extremas planteadas. En una bibliografía suficiente, para cada

[1] Por ejemplo, la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, en www.fi.uba.ar, se accede a las páginas con las correspondientes bibliografías, solo si se ingresa en la sección "información para alumnos". Desde la sección "información para profesores" no se llega a bibliografía alguna de las asignaturas.

alumno *dado* siempre será posible encontrar al menos un texto, cuyas demandas cognitivas y estilos de prosa no excedan su capacidad de decodificarlo, suponiendo el congruente esfuerzo. En este sentido, los textos son para los alumnos. Pero en otro sentido, solo un experto en la disciplina que a la vez tenga un completo conocimiento de los textos que se están recomendando, es capaz de introducir en ellos una clasificación que considere las dimensiones principales que debería tener en cuenta un estudiante *cualquiera* para elegirlos. Desde esta `perspectiva, los textos son para el profesor. Solo un profesor está en condiciones de discernir, por ejemplo, si el libro está organizado de modo que el lector pueda rápidamente encontrar la ubicación de un concepto de su interés, y si su lectura en ese lugar bastará para comprenderlo. Es también solamente el profesor quien puede juzgar si, aun cuando se diera la facilidad de localización, el texto exigirá una larga lectura continua para finalmente apropiarse del concepto, por estar su estructura trabajada con redundancia casi nula, demandando una lectura integral de la obra completa con múltiples referencias cruzadas cuyo seguimiento sea obligado. Uno y otro texto podrá tener sus lectores, pero es escasa la probabilidad de que exista un lector para todos.

Una ilustración del sentido de la doble respuesta –el texto es para el alumno, el texto es para el profesor– proviene de la diferenciación entre la organización del texto y su manifestación visible (Halmos 2012); La primera es el conjunto de principios mediante los que el autor, conforme a sus propósitos, decide los pesos de importancia de cada segmento, las relaciones de subordinación y las relaciones entre las distintas líneas, tanto entre elementos como entre conjuntos; estas decisiones derivarán en un grafo, no necesariamente plano. La más sencilla de las manifestaciones visibles de la organización es el índice, pero como no todo grafo es un árbol, la transformación de la organización en un índice ni es unívoca, ni se hace sin pérdida (Aldous y Wilson 2004, Diestel 2012, Golumbic y Harman 2012, Wilson y Watkins 1990)[2].

La lectura del índice le permite al lector experto inferir algunas organizaciones consistentes, mientras que al estudiante solo le informa de la localización de los apartados, sin oportunidad de juzgar porqué están así dispuestos. Se tiene aquí un mismo elemento –el índice– que puede ser leído tanto por el profesor como por el alumno, pero que informan de manera muy distinta a uno y otro. El índice de esta tesis

[2] En el original, el autor utiliza los vocablos *organization and arrangement* (Halmos 2012, 44). Un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclos (como por ejemplo la organización de un índice en un libro de texto); un grafo es plano si puede dibujarse en un plano de tal modo que dos aristas no se crucen excepto en algún vértice sobre el que incidan.

puede tomarse como ejemplo de una manifestación visible necesariamente insuficiente de su organización. El modelo teórico utilizado ubica los libros de texto de matemática de nivel universitario en un espacio tridimensional (Rezat 2008, Rezat 2006) situando el texto T en uno de los cuatro vértices de un tetraedro, siendo los tres restantes: C (el conocimiento matemático), P (el profesor), y E (el estudiante). La organización analiza tres relaciones binaria: la primera es bidireccional, y cubre las del texto con el conocimiento (T $\leftrightarrow$ C); la segunda es reflexiva (T $\leftrightarrow$ T) entre los textos; la tercera es unidireccional, la demanda del texto sobre el estudiante (T $\rightarrow$ E). Luego, la organización en un nivel muy global se resume en el grafo C $\leftrightarrow$ T $\leftrightarrow$ T $\rightarrow$ E, organización no lineal que es transformada en la secuencia de los tres capítulos centrales 4 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 6; si bien el índice ha destruido la estructura original, un lector experto en las nociones del AMT podría conjeturarla leyendo los títulos y subtítulos de esos tres capítulos, junto al peso relativo entre ellos y el resto del texto.

Los estudiantes lectores siempre podrán dar un juicio de un libro de texto *después* de su lectura casi completa, mientras que un profesor podrá, seguramente juzgarlo *antes* y con un vistazo al modo en que el autor organiza los múltiples segmentos de prosa matemática para imprimirle el estilo que le es propio Un modo de que el texto resulte útil a lectores con diversos intereses y preparaciones previas, consiste en marcas que permitan distinguir entre lo que es matemática y lo que, no siéndolo, está para que el lector pueda llegar a interiorizar los conceptos matemáticos, y de ese modo “minimizar la resistencia del lector y maximizando su comprensión del lector, manteniéndolo en el camino sin inesperadas interrupciones” (Halmos 2012, 23). La cita no censura las interrupciones, sino las que interfieren sin aviso; esto significa que el autor debe tener algún sistema de señalizaciones que advierta toda vez que se presenta un cambio en el status del segmento de prosa. Un profesor no sufre distracción aunque el texto carezca de señalización, pues su competencia lectora asigna el carácter del trozo que está leyendo a su categoría (proposición, ejemplo, observación, contraejemplo…) de modo automático, y ajusta su atención según sus intereses. El estudiante-lector, por el contrario, necesita esforzarse para distinguir las funciones gramaticales y lógicas de estos segmentos en el discurso, careciendo de referencias para asignarles el peso relativo que mejor ajuste a su sistema cognitivo.

Esta investigación, en la medida que construye y analiza dimensiones no explícitas en los textos, poniendo en la superficie su naturaleza y estructura, se propone contribuir a la comprensión del tipo de abstracción y complejidad que distancia el texto de un potencial lector, e introduce algunas medidas de esas dimensiones. Sus resultados muestran que los libros de texto, escritos ciertamente para estudiantes, son objetos que pueden resultar muy heterogéneos en múltiples sentidos, todos amparados bajo un mismo título y reunidos en una misma bibliografía. Estos hechos resultan de importancia para aquellos que aún esperan que los alumnos aprendan algo leyéndolos y no los hayan categorizado como anagramas inalcanzables para los estudiantes. Aunque el conocimiento matemático, a igual que la cultura, "no está en los objetos –los libros– sino en ciertas conductas y acciones –leer…–" (Chartier 2005, 79), la lectura se ve favorecida por el reconocimiento de esos objetos. Los textos de matemática analizados prueban además, que *saber leer* no significa poder leerlo *todo*, concepción sostenida por algunas corrientes pedagógicas del siglo XIX (Chartier 2005, 117).

Entre los dos extremos, (1) *el libro de texto como objeto imprescindible para el aprendizaje universitario*, (2) *el libro como objeto ilegible para el estudiante universitario*, los resultados de esta tesis probarán que los libros de texto alcanzarán con más facilidad a sus destinatarios naturales si un experto organiza el material en bibliografías que, además de presentar una selección de libros, vuelva visibles los criterios que han decidido esa selección, los propósitos de su lectura, las características relevantes de cada libro y las competencias lectoras que suponen.

Figura 1. El mismo *texto* proveniente de dos *libros de texto* del mismo autor, Walter Rudin

1.1 Ejemplo Empecemos demostrando que la ecuación

(1) $$p^2 = 2$$

no se puede satisfacer por ningún número racional p. Para ello supongamos que se satisface: podremos escribir $p = m/n$, donde m y n son enteros y además podremos elegirlos de modo que los dos no sean pares. Supongamos que lo hemos hecho; entonces (1) implica que

١، ١ مثال: نبين الآن أن المعادلة

(١) $$p^2 = 2$$

لا يمكن أن تتحقق من قبل أي عدد نسبي p . لو كان يوجد هنالك مثل هذا العدد، لكان
بإمكاننا أن نكتب $p = \frac{m}{n}$ حيث n و m عددين صحيحين ليسا زوجين بنفس الوقت.
لنفترض أن هذا قد حدث. عندها فإن المعادلة (١) تدل ضمنا على أن

Fuente: elaboración propia a partir de originales de *Principios del análisis matemático* (Rudin 1980, 2)

La expresión *libro de texto* en esta tesis debe sobrentenderse como su *texto*. Se distingue, desde Kant, entre "el libro como objeto material, como *opus mechanicum*, que pertenece a quien lo ha comprado, y el libro como discurso dirigido al público cuyo propietario es el autor” (Cavallo y Chartier 2011, 13). Esta tesis trata sobre todo del *texto* de los libros de texto y solo ocasionalmente de los libros mismos: así, los dos textos de la Figura 1, que bien pueden considerarse diferentes desde parámetros que van mucho más allá de la diferencia visible del idioma (Chartier 2005b, 2006 y 2011b), no resultan distinguibles desde las variables de análisis de esta tesis.

2. Coordenadas de la tesis

Esta sección indica las coordenadas de esta tesis en un espacio tetradimensional de temáticas dominantes según cuatro ejes que pasan por el libro de texto: (1) el texto y su estructura; (2) el texto en el *curriculum*; (3) el texto en sus contextos; (4) el texto en su evolución. Se pretende así “situar claramente el estudio en el cuerpo existente de investigaciones previas” (Lester y Lamdbin 1998, 12). Los cuatro ejes permiten una mejor apreciación del peso con el que intervienen las nociones esenciales que atraviesan los textos y que resultan de la identificación de los asuntos, preguntas, enfoques, definiciones, valores y perspectivas, en el marco de recomendaciones de la *American Educational Reasearc Association* (Boote y Beile 2012). Para que el espacio así construido pueda cumplir su función de sistema de referencia debe alojar con cierta holgura las dimensiones del objeto tesis. Esta función del sistema de coordenadas permite describir la tesis moviéndose principalmente sobre el eje (1), con algunas proyecciones menores sobre el eje (2); solo algunas menciones laterales permiten hablar de mínimos registros sobre los dos ejes restantes, que actúan como ejes contextuales.

Una relación de las investigaciones pertinentes relevadas hasta el 2008 se encuentra en la tesis de maestría del autor (Acero 2009). La que se presenta en este punto retiene de ese estudio las investigaciones cuyo sostenido nivel de citación las han convertido en referentes, y entre ellas se establece una selección basada en la proximidad con el tema de la tesis de los estudios recientes incluidos en el programa cognitivo en el que se inscribe el marco del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*), del que se vale esta tesis, y principalmente en los dos primeros ejes (Maxwell 2006, 28-31). En cualquier caso, la construcción del sistema puede completarse en Acero (2009, 1-17).

El recorrido a través de las investigaciones que se hace en este apartado es luego repasado para señalar los puntos de contacto –tanto teóricos como metodológicos– con esta tesis.

2.1. Eje 1: el texto y su estructura

En un sentido muy amplio, las diversas investigaciones se refieren a la estructura de un libro de texto para caracterizar la forma en que sus diversos componentes se conectan para constituir el todo, el carácter de tales conexiones, los modos de presentarlas y diferenciarlas, sus impactos sobre las demandas cognitivas. Es el eje de esta tesis, por lo que los estudios consignados en este renglón son más numerosos. El trabajo clásico *How to write mathematics* (Steenrod y otros 1975) es inspirador directo de muchas investigaciones, como *Conseils aux auteurs de textes mathématiques* (Audin 2012), centradas en la caracterización de la naturaleza funcional de los segmentos de prosa y su organización en los libros de texto. Aunque los títulos sugieren contenidos prescriptivos, son más bien descriptivos: "cómo escribo *yo* matemática", hubiese preferido titular uno de los autores (Steenrod y otros 1975, 19). En todos los casos dejan establecido que hay una diversidad muy amplia de organizaciones correctas de la estructura de un texto matemático, sin que esto signifique que todas ellas sirvan por igual a sus potenciales lectores. Estos trabajos remarcan que una redundancia casi nula –bastante frecuente– en la escritura obliga a una lectura integral, además de obligar a una recarga de la memoria del lector; los segmentos y capítulos se convierten en relativamente autónomos si se concede algún nivel de redundancia en las referencias, las notaciones y las repeticiones mismas. La concisión, que deriva del elevado poder de compresión del sistema simbólico, se halla presente en los libros de texto de matemática en mayor o menor grado: cuanto más se eleva menos sencilla resulta la lectura, al disminuir su redundancia. La redundancia es incluida en el análisis de la abstracción en esta tesis, y también está presente en la estructura modular de su misma organización.

Plenamente alineados en este eje se hallan los siete trabajos presentados por el autor en el período 2011–2012, todos antecedentes directos de esta tesis. Las demandas cognitivas en los textos de álgebra lineal correlacionadas con los estilos de prosa y la intensidad de su presencia en la bibliografía de las universidades argentinas son estudiadas mediante el análisis de contenido y dentro del marco del AMT en dos trabajos de 2011 (Acero 2011a, 2011b). La naturaleza de la abstracción relevada a través de los textos de Cálculo en las universidades argentinas es el objeto de *La Abstracción de la Matemática en la Ingeniería* (Acero 2012c), mientras que su carácter distintivo se trata en *Diferencial de Abstracción en la Ingeniería* (Acero 2012b). Una descomposición estructural de la definición de un concepto a través de sus componentes intensionales constituye el núcleo del análisis de textos en *El sinuoso concepto de curva y los libros de texto* (Acero 2011c), mientras que los artículos *Heterogeneidad bibliográfica en Ingeniería* (Acero 2012a) e *Intertextualidad bibliográfica y el cálculo vectorial* (Acero 2012d) se analizan los efectos de la intertextualidad sobre dos aspectos: los matemáticos y los cognitivos; el primer artículo trata bibliografías nacionales, mientras que el segundo se extiende a títulos de uso en el extranjero. En todos los casos, el análisis de contenido es el método y algún recorte específico del programa cognitivo del AMT es el marco teórico, siendo sus análisis y resultados parciales integrados en esta tesis.

En el capítulo II de *The elaboration of school textbooks: methodological guide* (Seguin 2012) se presenta una visión de la estructura y funciones del libro de texto escolar como una herramienta de instrucción estructurada en capítulos y unidades que parte desde conocidos conceptos a otros que progresivamente se van presentando. En la matemática avanzada, en cambio, son múltiples los ordenamientos posibles, mientras que la abstracción se produce en saltos cualitativos, como prueba esta tesis.

Una investigación que abarca un período de cinco años (1990-1995) en escuelas medias de Estados Unidos es (*Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning*), conocida por la sigla QUASAR (Brändstrom 2005, Henningsen y Stein 1997, Stein y Smith Schwan 1998), establece una clasificación de las demandas cognitivas de los ejercicios según que su resolución exija: (a) memorización, (b) procedimientos desconectados de conceptos, (c) procedimientos conectados con conceptos, (d) el ejercicio efectivo de la matemática. Según QUASAR, los ejercicios que demandan memorización implican la reproducción de hechos, reglas o expresiones previamente aprendidas; los procedimientos inconexos son los que requieren de un algoritmo que se aplica sin ambigüedad y están orientados a producir una respuesta correcta; los procedimientos significativos requieren de alguna elección de procedimientos alternativos y reclaman su conexión con los conceptos o definiciones centrales; finalmente, el ejercicio efectivo de la matemática exige un pensamiento complejo no algorítmico para ser aplicado a una situación cuya resolución no está sugerida por el ejercicio o actividad propuesta, necesita de una regulación autónoma del estudiante en el control de los procedimientos y la satisfacción de las restricciones.

Otro análisis de las demandas cognitivas es puesto en relación con las tareas no rutinarias en los libros de texto en *Student's construction for a non-routine question* (Rizvi 2009, 481-488). En *Interactive Diagrams: alternative practices for the design of* *algebra inquiry,* en cambio, las demandas cognitivas y formas de aprendizajes de los libros de texto se contraponen a las propias del material digital interactivo (Naftaliev y Yerushalmy 2009, 185-192)

La forma en que los diversos registros semióticos (algebraicos, gráficos, simbólicos) de representación afectan los factores cognitivos es investigada en los libros de texto de matemática elemental por Panaoura y otros (2009, 273-280). Los investigadores introducen también la componente afectiva y su interacción con los factores cognitivos en la consecución de metas académicas. Los investigadores de la Universidad Católica del Uruguay (Lacués Apud y Peña Brussone 2006, 1-12) analizan la intensidad de las demandas cognitivas a través de dos fragmentos del texto *Álgebra lineal. Una introducción moderna* (Poole 2004) y concluyen la conveniencia de añadir una guía de lectura que facilite al estudiante la tarea de tratar intensivamente con los sistemas simbólicos y contenidos estructurados jerárquicamente en definiciones, teoremas y otros.

En *Textual Analysis* (Dormolen 1986, 141-171) se consideran los problemas como el origen de una actividad matemática que es comunicada por medio de los libros de texto, que se estructuran con la intervención de definiciones, teoremas, reglas, métodos y convenciones en segmentos de prosa matemática, agrupados en cinco categorías: (a) núcleo teórico (compuesto por las definiciones, axiomas, teoremas), (b) núcleo algorítmico (integrado por las observaciones explícitas que permiten ejecutar una serie finita de pasos que conduce a un resultado deseado), (c) núcleo lógico (el conjunto de afirmaciones y reglas que indican cuáles son las transformaciones válidas entre los conceptos teóricos), (d) núcleo metodológico (integrado por pistas heurísticas o sugerencias operativas), y finalmente, (e) núcleo comunicativo (con el conjunto de convenciones propias del lenguaje simbólico incluyendo sus aspectos sintácticos).

Estructural, pero ya intertextual es *Comparative Analysis of Italian and Greek Euclidean Geometry textbooks: a case study* (Mouzakitis 2006, 1-33) que comprende un análisis comparativo de las estructuras de dos libros de texto (Anexo I, 1.1) de distintas nacionalidades de geometría euclídea y utiliza en lo que respecta a las demandas cognitivas una clasificación adaptada de TIMSS (*Trends International Mathematics and Science Study*): (1) conocimiento (representaciones equivalentes, recuperación de propiedades de objetos matemáticos), (2) utilización de procedimientos de rutina, (3) investigación y resolución de problemas (formulación y clarificación de situaciones problemáticas, desarrollo de estrategias, resolución, predicción y verificación), (4) razonamiento matemático (desarrollos en la notación y vocabulario adecuado, desarrollo de algoritmos, generalización, abstracción, planteo de conjeturas, justificación y pruebas), (5) comunicación (la utilización de la notación propia del lenguaje, unida a una discusión y crítica). También de TIMSS es la segmentación del texto en ocho categorías: Teoremas, Definiciones, Axiomas, Ejemplos, Gráficos, Ejercicios, Bloques narrativos y Otros. En lugar de comparar dos textos de sendas nacionalidades, *Many visions, many aims* (Schmidt y otros 2002), compara textos de matemática del nivel medio a través de más de cincuenta países. Cada texto es analizado a través de cinco categorías amplias llamadas unidades, las que a su vez se subdividen en ocho subcategorías llamadas bloques (Narrativos, Gráficos, Informativos, Ejercicios, Actividades sugeridas, Ejemplos, Otros). Los ejercicios son caracterizados según sus demandas cognitivas, en este caso sin modificaciones de las ya detalladas propuestas por TIMSS, siendo el parámetro de comparación los valores tomados por cada grupo de textos a lo largo de las categorías.

Con componentes en el eje (1) y en el eje (4), *Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century* (Herbst 2002, 283-212) sigue la evolución de la estructura de pruebas en los libros de texto de nivel medio en los Estados Unidos, relevando la persistencia del patrón definición-teorema-prueba, remitiendo a Euclides.

En *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks. An analysis of the levels of difficulty* (Brändstrom 2005, 1-97) de la Universidad de Tecnología de Suecia se efectúa un análisis de la diferenciación presente en la estructura de tres libros de texto de matemática de nivel primario (Anexo I, 1.2), efectuando una caracterización de la presencia de las demandas cognitivas. La taxonomía es una adaptación de la originalmente propuesta en Bloom, y muy próxima a la recogida por TIMSS, con seis subcategorías, la asignación es por análisis de contenido e incluye un apartado metodológico para la confiabilidad de las asignaciones.

La investigación *Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO* de la Universidad de Cádiz (Azcárate Goded y Serradó Bayés 2006, 341-378) se centra en la estructura de los libros de texto de matemática para la Educación Secundaria Obligatoria a través del concepto de azar, relevado mediante el análisis de contenido a través de una muestra de cuatro editoriales.

El artículo *Current difficulties in the teaching of mathematical analysis at university: an essay review of 'Yet another introduction to analysis by Victor Bryant'*

(Tall 1992, 37-42) analiza la estructura de un libro de texto de análisis matemático utilizado como introductorio al primer curso universitario en el Reino Unido de Gran Bretaña. Del estudio se desprende que el texto evidencia una preocupación por tomar en cuenta las dificultades de los estudiantes en la formalización de los objetos propios de la disciplina, y que responde a una concepción que permite introducir las ideas mediante ejemplos genéricos que permitan, mediante posteriores revisiones, un aislamiento de sus propiedades formales. Destaca que el libro participa de una tendencia que refleja el cambio del contexto social y responde a la necesidad de introducir en el material de instrucción una mayor abundancia de aplicaciones prácticas y casos que exijan la resolución de problemas y problemas denominados abiertos, con una sustitución del lenguaje áspero de los cuantificadores mediante recursos ofrecidos por el estilo de escritura, que es descripto como de una honesta transparencia, con la utilización de un lenguaje carente de pretensiones, y que con un vocabulario coloquial pretende resonar con los estudiantes tanto como resulte posible. Las técnicas del análisis de contenido y los conceptos del AMT –del que Tall es representante saliente– son intensamente utilizados en este estudio de casos.

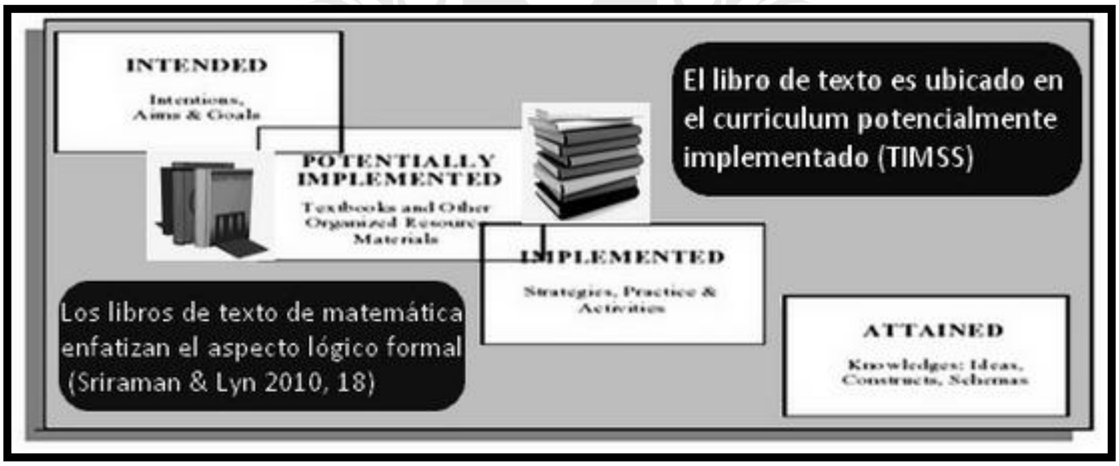
2.2. Eje 2: el texto en el *curriculum*

La influencia descendente de la estructura de los textos sobre las concepciones de los profesores es mostrada en *Problem Solving for the 21st Century* (Harel 2010a), llegando a constituir una rigidez que parece concebir la matemática como una colección de definiciones, teoremas y demostraciones, sin una visión global que permita alcanzar una idea de conjunto. También en la misma línea en *Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education* (Sriraman y English 2010, 7-22) se argumenta que el énfasis en aspecto formal y lógico de los libros de texto y su empeño en una presentación elegante y eficiente con una notación pulida y carente de redundancia, repercuten en las prácticas residentes en el *curriculum* implementado. Muchas investigaciones dan cuenta de esa confianza que los actores de las prácticas de enseñanza tienen en el libro de texto, como queda de manifiesto en una respuesta registrada como muy frecuente en los profesores "allí te dice lo que tienes que hacer" (Lerman 2010, 100), que revela no solo esa confianza en el poder del texto, sino también cierta rigidez para ensayar alternativas. La autoridad que emana del texto también alcanza por igual al alumno, como lo muestra el trabajo de (Sinclair 2010, 343-367).

En los trabajos de TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) “el estudio comparativo de matemáticas y ciencia transnacional más extenso y de mayor alcance que se haya alguna vez intentado” (Schmidt, y otros 2002, 51) se incluyen comparaciones textos en el contexto curricular de entre los que está la Argentina. “El marco conceptual del TIMSS considera el libro de texto como mediador entre las intenciones generales del *curriculum* y la instrucción en la misma clase” (Johansson 2005, 120).

En la distinción conceptual hecha por TIMSS, el libro de texto resulta así ubicado en una instancia intermedia que denomina ‘potencialmente implementado’, entre el *curriculum* pretendido y el *curriculum* implementado, tal como lo indica Figura 2.

Figura 2. La ubicación del libro de texto en el *curriculum* en la perspectiva de TIMSS (*Trends International Mathematics and Science Study*)



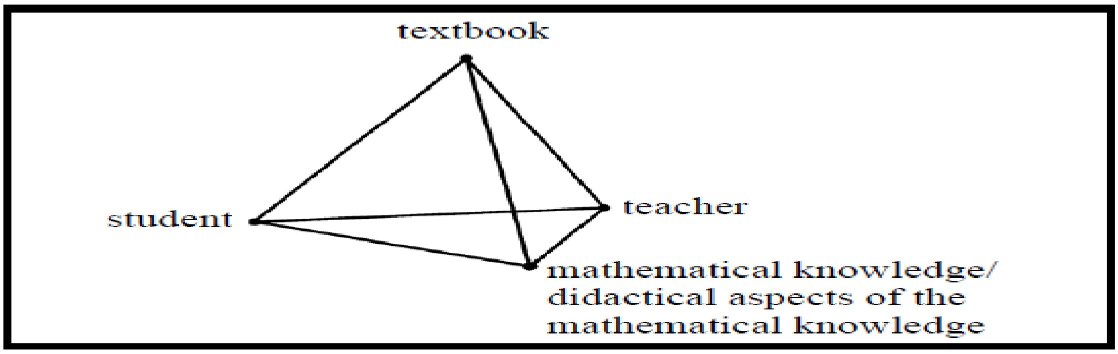
Fuente: elaboración propia a partir del original (Johansson 2003, 6)

En la perspectiva del grado de alineación entre el libro de texto y el *curriculum*, varios estudios de la Universidad de Chicago (Kulm y Curtis 2000, Kulm 1999, Kulm, Roseman y Treistman 1999), se analizan doce libros de textos de álgebra del nivel medio (Anexo I, 1.3), seleccionados mediante criterios de popularidad establecidos según el volumen de ventas y su presencia en la bibliografía recomendada por las instituciones. Identificados tres objetivos generales establecidos en el *curriculum* pretendido: (1) Representación y Modelización de funciones, (2) Representación de variables cuantitativas, (3) Operación con símbolos y ecuaciones, el estudio analiza en qué medida se consideran cubiertos en los distintos segmentos de los textos.

2.3. Eje 3: el texto en su contexto

En las perspectivas que consideran el libro de texto en relación a un contexto de producción, circulación, recepción y uso más amplio, convergen investigaciones en las que intervienen esquemas triangulares planos con el profesor, el texto y los estudiantes, esquemas de tetraedro que añaden un cuarto vértice en el espacio tridimensional como el de Rezat en *A Model of Textbook Use*; el investigador del Institut für Didaktik der Mathematik, de la Universität Giessen (Rezat 2006, 409-416) presenta un modelo que identifica los actores que directamente contactan con el libro de texto, que reproduce la Figura 3.

Figura 3. El libro de texto y sus inmediatos objetos relacionados, en (Rezat 2006, 409-416)



Fuente: *A Model of Textbook Use*. (Rezat 2006, 413)

En *Exemplifying definition: on the field-related character of teacher's content knowledge* (Leikin y Zazkis 2009, 1-8) se muestra la influencia que el conocimiento de los profesores tiene en la elección de los textos de Álgebra, Cálculo y Geometría; en tanto que dos trabajos convergentes (Freeman y Porter 1989, 402-420, Reys, y otros 2003, 74-95) consignan que los tópicos matemáticos que se hallan presentes en los libros de texto son los que tienen mayor probabilidad de ser presentados por el profesor, y también que los no incluidos en el texto muy probablemente quedarán excluidos de ese tratamiento; las mismas estrategias pedagógicas se verán influidas por el enfoque instruccional de los textos, al igual que la secuencia de la instrucción misma. El análisis de contenido y las mismas relaciones de dependencia entre texto y profesor refiere el estudio de nueve textos iraníes (Gatabi y Stacey 2009, 433-440)

Se a establecido una distinción de tres tipos de análisis textual (Dormolen 1986, 141-171, González Astudillo 2002, González Astudillo y Sierra Vázquez 2004): *a priori* que analizan el objeto texto (donde de hecho se ubica este estudio); *a tempo*, que consideran los usos del texto por profesores y alumnos; *a posteriori*, que comparan los resultados del tratamiento efectivo del texto por los alumnos y profesores. Siendo los estudios a posteriori los más escasos, merece un lugar destacado la investigación transnacional (Pepin y Haggerty 2003, Pepin 2007) que analiza la estructura y utilización de los textos en tres países (Inglaterra, Francia y Alemania). Las investigadoras prueban que el modo en que se enseña la matemática depende de un contexto que se halla en el nivel macro que alcanza las formas culturales propias de cada nación y que los textos mismos también responden a ese carácter nacional. Este estudio anterior es incorporado junto a otros cuatro análisis comparativos por la investigadora de la Universidad de Oldenburg (Knipping 2004, Knipping 2003), quien señala los análisis de esa naturaleza no impiden reconocer que las diferencias detectadas en los niveles macro bien pueden presentarse también entre instituciones del mismo país, o también entre diferentes usos del texto en diversas cátedras de una misma institución. Sin embargo, concede que el carácter nacional puede ser una manifestación de la noción de *habitus* para sostener la validez de un carácter cultural.

2.4. Eje 4: el texto en su evolución

Desde esta perspectiva se considera la evolución dialéctica del par texto-contexto. La metodología es propia del análisis histórico con una aproximación global que analiza las transformaciones experimentadas por la estructura y las concepciones manifiestas en la presentación de los textos con las sucesivas ediciones, los cambios respecto a otros libros de texto del mismo segmento disciplinar, y su relación con los que se han introducido en el proceso. La influyente investigación *On the methodology of Analysis Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author* (Schubring 1987) parte del supuesto de que la información acerca de la evolución y difusión de los saberes puede extraerse del análisis de textos antiguos de matemática, para lo que selecciona en su estudio el libro *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix; sobre ese mismo texto de importancia histórica, pero con enfoque ligeramente diferente se puede mencionar el estudio *Lacroix and the Calculus* (Caramalho Domingues 2012). Otro referente es *French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy* (D'Hombres 1984), que analiza los libros de texto de matemáticas publicados en Francia en el período comprendido entre los trabajos del matemático Bézout hasta el de los desarrollos más rigurosos del matemático Cauchy. Más reciente, *Hemenèutica del* *càlcul diferencial a l'Europa del segle xviii: de L'analyse des infiniment petits de L'Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802)* (Blanco Abellan 2011) toma por objeto la evolución del Cálculo, utilizando los dos libros de texto como mojones del inicio y fin de un período. La tradición del análisis de libros de texto franceses se explica por la conocida influencia del grupo Bourbaki (Sriraman y English 2010).

Por su parte, González Astudillo y Sierra Vázquez (2004) estudian la evolución del concepto de *punto crítico* a través de la estructura de los libros de texto texto mediante un sistema de cuatro categorías (sintáctica, semántica, pragmática y sociocultural). El análisis se desarrolla principalmente a lo largo del eje 4) con alguna proyección sobre el eje (1). La población la constituyen los libros de texto de la enseñanza secundaria en España en el período 1938–1999.

También en este eje, ahora con componentes sobre el eje (1) se tiene *Mathematics Textbooks and Promotion of Conceptual Understanding* (Lovric 2006, 1-13) que analiza una muestra de once libros de cálculo diferencial de una variable, publicados entre 1769 y 2000 (Anexo I, 1.4). La investigación registra un énfasis en la apariencia visual de la presentación, con un desplazamiento del lenguaje verbal hacia el visual y un número de páginas que ha aumentado considerablemente para los mismos o menores contenidos.

3. El estudio realizado

Este estudio analiza los libros de texto de matemática presentes en las bibliografías de carreras de ingeniería en las universidades argentinas y en las principales universidades del mundo occidental. El análisis se estructura a través de tres ejes: la naturaleza de la *abstracción*, el fenómeno de la *intertextualidad*, y las *demandas cognitivas* en diversos *estilos de prosa matemática*. El marco teórico se inscribe en la corriente cognitiva del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) y las variables de análisis se derivan de los métodos del análisis de contenido. Sus principales resultados en el campo teórico muestran los impactos del entramado de matemática y metamatemática que construye un texto: los que afectan a la competencia lectora, y los que afectan a la matemática misma. Sus resultados prueban la estabilidad del tipo de abstracción a través de los textos y de los conceptos (capítulo 4), la inestabilidad de un concepto a través de los textos (capítulo 5), la heterogeneidad de demandas cognitivas a través de los textos y sus estilos de prosa, y la convivencia de estos rasgos en una misma bibliografía (capítulo 6). En el campo metodológico, resultan dos instrumentos de medición de demandas y estilos debidamente calibrados (capítulo 6) y un instrumento de descomposición intensional de un concepto (capítulo 5). En el campo práctico, la conveniencia de organizar las bibliografías acortar la distancia entre los libros de texto y sus lectores potenciales. Finalmente, se dejan abiertas líneas de investigación dentro del AMT y también sobre la corriente epistemológica de didáctica de la matemática.

Las investigaciones reseñadas en al apartado anterior contienen aspectos que parcialmente son retomados y analizados en esta tesis. De los trabajos citados de Steenrod y otros (1975), Halmos (2012), Audin (2010), esta tesis trata el concepto de *redundancia*, noción que expresa la elevada compresión de contenidos a la que es sometido el lector de un texto de matemática, y muestra a través de los textos que la abstracción, una vez alcanzada, se comprime un definiciones que encapsulan una abstracción. La compresión resulta de la necesidad de tratar con objetos abstractos: “la matemática es una forma de lenguaje inventada por los humanos para discutir conceptos abstractos” (Metsisto 2013, 11).

Los trabajos del autor (Acero 2011a, 2011b, 2011c, 2012a, 2012b, 2012c y 2012d) son integrados en esta tesis, compartiendo todos algún recorte del marco teórico del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) y la metodología del análisis de contenido. La *abstracción*, *intertextualidad* y *demandas cognitivas* que allí se tratan son las dimensiones propias de este estudio. La composición de las demandas cognitivas utilizada por QUASAR es reconfigurada en el capítulo 6 de esta tesis.

La naturaleza de las dificultades y los factores que pueden servir de ayuda para aproximar los libros de texto a los estudiantes, tal como es tratada en la investigación de la Universidad Católica del Uruguay (Lacués Apud y Peña Brussone 2006, 1-12), es abordada en esta tesis a través de sus tres capítulos centrales (4, 5, 6), aunque aplicada ya no a un solo texto, sino a un conjunto heterogéneo de 121 textos.

El estudio estructural e intertextual llevado a cabo con dos textos (Mouzakitis 2006, 1-33) tiene alguna semejanza metodológica con el desarrollo en esta tesis del capítulo 5 (intertextualidad), y el capítulo 6 (demandas cognitivas), más allá de la diferencia cuantitativa (121 textos versus dos) con su correspondiente arrastre cualitativo.

A diferencia de los estudios de Herbst (2002) y de Azcárate Goded y Serradó Bayes (2006) que descubren ciertos estereotipos preponderantes en los textos de nivel medio, esta tesis muestra que las presentaciones, cuando se trata de matemática avanzada tienen grandes dispersiones respecto al patrón definición–teorema–prueba, dando muestras de gran heterogeneidad.

Las técnicas cualitativas del análisis de contenido y los conceptos centrales del AMT puestos en juego en la investigación de Tall (1992) son intensamente utilizados a través de los capítulos centrales de esta tesis, pero de modo especial en el aspecto cualitativo de la abstracción desarrollado en el capítulo 4.

El modelo tridimensional del tetraedro (texto, estudiante, conocimiento, profesor) para el libro de texto tal como es presentado en Rezat (2006) se integra en esta tesis pero en una versión bidimensional que es suficiente para el recorte del objeto de estudio. El tetraedro se convierte en bidimensional al retirar el vértice ocupado por el profesor.

A modo de resumen, en el sistema de referencia construido en el punto anterior, este trabajo resulta un estudio estructural sincrónico *a priori* de 121 libros de texto de matemática para ingeniería utilizados en las universidades argentinas y las principales del mundo occidental. El análisis estructural procede a través de tres ejes principales: la *abstracción*, la *intertextualidad* y las *demandas cognitivas* junto a sus *estilos de prosa*. La integración de los tres ejes permite construir medidas de la distancia entre los textos y sus potenciales lectores.

La tesis muestra que, aun manteniéndose la calidad y el nivel de la abstracción en un mínimo elevado, la mayoría de los autores de los libros de texto apelan a diversos recursos procurando que la estructura de la matemática que ellos exponen encaje en el sistema de conocimientos disponibles por el estudiante. Pero también se prueba que esos textos están escritos con una variedad tal, que es muy poco probable que a un *mismo* estudiante le resulte indiferente la lectura de uno u otro texto; dicho de otro modo, habrá textos que posiblemente le resulten más cercanos a uno que a otros, y una medida de esa proximidad resultará del modo en que cada autor presente las diferentes relaciones entre los conceptos. Las claves que el estudiante necesitaría para anticipar sus posibles afinidades con uno u otro texto, pueden ser discernidas por un experto, pero no pueden suponerse a mano del alumno que lee una lista bibliográfica que los muestra como si fueran homogéneos. La capacidad de diferenciar –y por tanto elegir– no puede hacerse de modo directo, si los textos se presenta de un modo tal que “solo los autores y las editoriales parecen poder diferenciar los textos, con los mismos contenidos y semejantes prólogos” (Kline 1977, 10).

3.1. Objetivos

Esta tesis se propone analizar las dimensiones esenciales de la estructura de los libros de texto de matemática avanzada de carreras de ingeniería en la Argentina y en las principales universidades del mundo occidental, y sus relaciones con la competencia exigida a sus potenciales lectores. El objetivo general se alcanza mediante los siguientes objetivos específicos:

(A) Caracterización de la naturaleza de la abstracción en la matemática avanzada, y análisis del modo en que es presentada por los libros de texto. Este objetivo específico es cumplido en el capítulo 4.

(B) Determinación del grado de estabilidad de un dado concepto abstracto ante la variación de tratamientos en diversos textos, y el análisis de su impacto sobre la misma matemática. Este objetivo es cumplido en el capítulo 5.

(C) Caracterización de las demandas cognitivas y estilos de prosa a través de los diversos textos y análisis de su intensidad relativa alcanzada, mediante sendos instrumentos con la calibración suficiente para la matemática avanzada. Este objetivo es cumplido en el capítulo 6.

El objetivo general se cumple con la integración parcial de los resultados obtenidos en cada uno de los capítulos centrales (4, 5, 6) y se presenta junto a la discusión en el capítulo 7. Las hipótesis subyacentes que centran el enfoque y los métodos en cada uno de estos capítulos son las siguientes:

(a) La calidad de la abstracción es un atributo que permanece relativamente estable a través de la población de textos y entre los diversos conceptos tratados.

(b) Los conceptos más abstractos de la matemática pueden ser contextuales y solo adquieren sentido un una sintaxis local a cada texto. La inestabilidad del tiene impacto no nulo sobre la matemática misma.

(c) Las demandas cognitivas y sus distribuciones están sujetas a altas dispersiones a través de los textos y de sus estilos de prosa, lo que conforma un conjunto heterogéneo de textos.

3.2. Relevancia

Las investigaciones seleccionadas para la construcción del espacio de referencia enfatizan la escasez relativa de los estudios referidos a los libros de texto en el área de la matemática avanzada. La comprobación de que la mera presentación formal de una estructura en un cuerpo textual ordenado no provoca efectos cognitivos apreciables en el pensamiento del estudiante, han producido en la última década un registrado aumento del número de investigaciones enfocando la organización de los libros de texto (Acero 2012a, Acero 2012d, Metsisto 2013, Valero 2012). Las áreas elegidas para este estudio –Cálculo y Álgebra Lineal– se ubican curricularmente en la formación básica de las carreras de ingeniería, que coincide también en las universidades argentinas con el tramo inicial de las carreras de ingeniería. La población estudiantil a la que se dirigen los libros de texto es entonces no solo la más numerosa (las dos áreas son compartidas por todas las especialidades) sino también aquella en donde se produce la mayor deserción; la abstracción, como se documenta en esta tesis, ha sido muchas señalada entre las principales causas. La importancia de examinarla ha resultado suficientemente proclamada. En *Rating Algebra Textbooks* los profesores Kulm y Curtis declaran que asignaturas como el álgebra son vistas "por los estudiantes como una puerta cerrada [...] y por ello se requiere examinar cuidadosamente las herramientas que los profesores utilizan en su enseñanza: los libros de texto de álgebra" (2000, 1), y se señala el salto diferencial con el nivel medio al producir una ruptura epistemológica importante con la aritmética" (Vergnaud 2011, 2005). El salto que la abstracción implica en estos niveles, dice uno de los teóricos del AMT "se convierte con frecuencia para la mayoría de los estudiantes en los primeros cursos de la universidad en un abismo por el que se precipitan" (Eisenberg 1991, 149). Otro autor de la misma corriente dice sentir cierta envidia mientras lee artículos de áreas no matemáticas, puesto que sus autores "ejercen una libertad de expresión que les está negada a los matemáticos. Los términos y las frases no necesitan ser definidos con precisión y las afirmaciones solo necesitan ser más o menos verdaderas" (Steenrod y otros 1975, 14). Las diferencias entre un texto matemático y uno que no lo es, se extiende a sus objetos que "expresado sin precisión, no están ubicados en el espacio ni en el tiempo y no intervienen en relaciones causales" (Parsons 2013, 1). La obra *Mathematical Thought and Its Objects* de donde proviene la cita, trata de la naturaleza de los objetos matemáticos en sí y su status en la filosofía de la matemática, mas no como son representados en los libros de texto. La distancia entre un texto matemático y el discurso corriente solo puede dimensionarse *después* de conocida la naturaleza de cada uno de ellos: ambos tratan con objetos abstractos, pero la abstracción es de diferente naturaleza; ambos hacen afirmaciones acerca de esos objetos, pero el modo de construirlas y lo que de ellas puede predicarse es distinto. El reconocimiento de la estructura de los libros de texto es, entonces, el punto de partida para poner en evidencia el diferencial de abstracción que suponen.

La comprensión del discurso en esos niveles y naturaleza de abstracción no se genera sin que el estudiante tenga a su alcance la posibilidad de acceder a algún tipo de representación en el que venga envuelta esa abstracción, aunque “la representación resultará cognitivamente parcial respecto a lo que ella representa” (Duval 1998, 85). En la misma dirección “aunque es importante tener muchas representaciones de un concepto, su existencia no es suficiente garantía de una flexibilidad en el uso de tales representaciones para la resolución de problemas” (Dreyfus 1991, 32). Resulta así recomendable el origen de tales representaciones, específicamente en sus más reconocidas fuentes: los libros de texto.

3.3. Limitaciones

La primera limitación de este estudio resulta de la selección de una perspectiva teórica, que solo permite analizar los objetos que caen bajo el cono que la teoría puede iluminar (Popper 1994, 103). Actualmente dos grandes programas de investigación se desarrollan en el campo de la matemática avanzada: el programa *proceptualista* y el programa *epistemológico* (Gascón 2003b). El programa de investigación cognitivo, en el que se inscribe el proceptualismo del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) es visto como relativamente inconmensurable al programa epistemológico, lo que introduce además limitaciones en las explicaciones de las relaciones entre esos objetos. Por ejemplo, son invisibles para esta tesis las prácticas institucionales en las que los objetos estudiados (los libros de texto) adquieren su significado local, lo que exigiría un tratamiento en el lenguaje de praxeologías locales y regionales, propio de la TAD (*Théorie Anthropologique du Didactique*) en el programa epistemológico.

La segunda limitación proviene del recorte específico del objeto de estudio. Los libros de texto, en los modelos teóricos ya inscriptos en el AMT, se insertan en una red de relaciones que incluye como nodos al conocimiento matemático, los estudiantes y los profesores; sin embargo, los profesores no participan del objeto analizado en esta tesis, aunque la tesis misma es el producto de la relación establecida entre un profesor –el autor– y los libros de texto, esa relación misma no es estudiada, aunque sí mantenida bajo control con medidas de confiabilidad intersubjetiva. Esta restricción impide considerar relaciones ternarias en las que intervenga el profesor mediando entre el texto y el alumno, por ejemplo.

Una tercera limitación, y siempre dentro del mismo modelo teórico del AMT, proviene del carácter asimétrico de una de las relaciones estudiadas: la del texto T con el estudiante E que se construye como unidireccional T $\rightarrow$ E, caracterizando lo que el texto, en tanto emisor, supone de capacidades de decodificación en el alumno como receptor. El sentido inverso de la relación queda fuera de este estudio, los procesos de lectura efectivamente verificados, las variaciones entre los diversos lectores que habitan el conjunto E, sus capacidades y sus conocimientos previos. Se observa, por otra parte, que para la relación inversa podría necesitarse una metodología que no se limitara al análisis de contenido, el que en cambio es suficiente para las relaciones estudiadas (Inglis y Alcock 2012).

En cuanto a los libros de texto mismos, el recorte se queda solo con el texto y deja fuera el libro como objeto; ya en el texto, opera todavía un recorte más, que proviene de la perspectiva estructural que estudia el carácter de los segmentos de prosa según su función lógica en el entramado del texto.

No obstante este conjunto de limitaciones, se discute en el cuerpo de la tesis la elección del objeto y la suficiencia del marco teórico respecto de los objetivos propuestos (Capítulo 2, sección 2) y en de qué manera son origen de líneas abiertas de investigación (Capítulo 7, sección 4) y perspectivas de prolongación.

4. Organización

En esta misma tesis se diferencia, como concepto matemático, entre organización y sus manifestaciones visibles, el índice entre las más evidentes y sencillas. Este apartado presenta muy sucintamente lo presentado en detalle en diversas secciones de este estudio (Capítulo 2, sección 2, Capítulo 3).

El núcleo de la tesis se centra en tres capítulos (4, 5, 6) en los que se trata, respectivamente, de la abstracción, la intertextualidad y las demandas cognitivas. El último capítulo integra los resultados parciales de la tríada, mientras que los tres primeros introducen el tema dando lineamientos generales de su entorno conceptual, materiales utilizados y métodos para producir y analizar los datos.

El conjunto se estructura para permitir cierta autonomía a los tres capítulos centrales, cada uno de ellos con una organización local idéntica (introducción, marco teórico, materiales y métodos, resultados) que replica la organización en el nivel global de la tesis completa. Esta estructura anidada es reforzada mediante concesiones a la redundancia, que permiten una lectura local sin recargar la memoria de lectura; este principio de organización limita razonablemente la cantidad de referencias cruzadas y prácticamente elimina símbolos y siglas globales, aun las que son más frecuentes, como por ejemplo AMT (*Advanced Mathematical Thinking*).

En el capítulo 1 se presentaron las aristas esenciales de la discusión delimitándose el recorte que define el objeto de la tesis, especificando sus objetivos y demarcando sus fronteras inducidas por las limitaciones teóricas y metodológicas.

El capítulo 2 presenta las líneas generales del marco teórico, que subyacen a los conceptos más específicos que son parcialmente expuestos en cada uno de los capítulos centrales. Del mismo modo, el capítulo 3 hace lo propio con el método de análisis de contenido, mostrando los principios generales que se aplican a la clase general, mientras que los materiales y métodos particulares de cada capítulo central son tratados en su respectiva ubicación.

La secuencia de los tres capítulos centrales (4, 5, 6) opera de modo expansivo en lo que se refiere a las relaciones que estudian. El capítulo 4 efectúa un análisis de la abstracción a través de las relaciones del texto T con el conocimiento C, mientras que el capítulo 5 añade a esa relación las que se producen internamente en el conjunto de los textos mismos, esto es T – T, para finalmente, en el capítulo 6 extenderlas hasta el vértice E, a través de las demandas cognitivas, esto es T (texto) → E (estudiante). El alcance de cada uno de los tres capítulos está contenido en el siguiente; una posible representación gráfica de esta organización, algo más expresiva que el mismo índice, se ve en el Capítulo 7, apartado 2.

El capítulo 7 retoma cada uno de los resultados obtenidos en los tres capítulos anteriores, para considerarlos ahora en conjunto y en sus relaciones, con una discusión de la medida en que puede decirse que satisfacen el objetivo general de la tesis.

CAPÍTULO 2

ENTORNO CONCEPTUAL

1. Introducción

En la organización de esta tesis, cada uno de los tres capítulos centrales de análisis contiene el recorte del marco teórico que le es propio para sus propósitos locales. Cada uno de esos segmentos se articula en un entorno conceptual más amplio, constituido por la corriente del pensamiento matemático avanzado AMT (*Advanced Mathematical Thinking*), que proporciona los conceptos esenciales que permiten cubrir las necesidades y objetivos presentados en el capítulo anterior. Desde ese marco se desprenden las variables que permiten responder las preguntas planteadas. En este capítulo se presentan las cuestiones generales de carácter global que permite apreciar el entorno conceptual en conjunto y cómo se distribuye en los tres capítulos centrales.

La elección del marco teórico proporcionado por los teóricos del AMT proviene de la inclusión en sus alcances de la estructura de los contenidos que este trabajo se propone estudiar, que se inscriben con nitidez en el dominio considerado de nivel superior del pensamiento matemático. Se ha observado (Thompson 1999, 1) que si se pretendiera deducir en qué consiste la matemática a partir de las producciones registradas de la investigación en didáctica de la matemática hasta bien entrado el siglo XX, se concluiría que la humanidad no habría llegado mucho más lejos de las cuatro operaciones elementales de la aritmética. La expresión *pensamiento matemático avanzado* se refiere en esta corriente tanto al pensamiento que trata contenidos propios de la matemática avanzada como a las formas avanzadas del pensamiento al tratar la matemática o ambos, diversidad de acepciones deliberadamente introducida por la corriente. La investigación en la didáctica de la matemática ha prestado atención a las características de un libro de texto en tanto género, mientras que la especie particular del texto de matemática en el ámbito universitario es particularmente estudiada por el AMT, que deja establecido que: (a) los modos de presentación de los contenidos estructuran y condicionan las formas del aprendizaje; (b) entre las características distintivas que son propias de este nivel, se presentan conflictos entre la forma y organización de la presentación, por un lado y los modos que podrían favorecer la adquisición de conceptos, por el otro.

Esta corriente, que reconoce sus orígenes en las últimas dos décadas del siglo XX, se propone desarrollar nociones cognitivas de una complejidad suficiente para captar los procesos que se desarrollan en el pensamiento matemático en los niveles universitarios; su surgimiento fue "explícitamente determinado por la manifiesta insuficiencia de la noción general de 'aprendizaje humano' y de los medios disponibles parra describir el conocimiento matemático" (Gascón 2003b, 4). De esta manera, en el año 1976 en la ciudad de Karlsruhe se constituye el equipo International *Group for the Psychology of Mathematical Education* (PME) de alrededor de un centenar de miembros conducidos por Efraim Fishbein, como un subgrupo de la *International Commission on Mathematics Instruction* (ICMI), con encuentros anuales que convocan investigadores de todo el mundo expertos en los dominios de la enseñanza, el aprendizaje y el pensamiento matemático, determinados a producir investigaciones que pudieran escapar del dominante paradigma conductista. Un repaso a los principales nombres de sus miembros es suficiente para dimensionar el peso e impacto del equipo, cuyos congresos anuales convocan un número de investigadores de orden del millar[3]. Ya hacia 1985 se forma una subdivisión especializada centrada en el Pensamiento Matemático Avanzado (AMT)[4]. El grupo se propone investigar los modos en que se construyen y adquieren sentido las ideas matemáticas mediante el desarrollo y sofisticación del lenguaje para admitir conceptos de creciente abstracción, desde el simbolismo numérico hasta las descripciones, definiciones y deducciones para culminar en teorías axiomáticas formales. La corriente examina la naturaleza del pensamiento matemático avanzado y la intensidad de sus demandas cognitivas, ante la evidencia de que "lamentablemente, pocos de los más avanzados procesos se presentan disponibles para el estudiante promedio de un curso de matemática avanzada" (Tall 1991a, xiii). Aunque el pensamiento avanzado en matemática ha desempeñado un papel esencial en el desarrollo de la humanidad por más de dos milenios, todos los estudios previos a la constitución de la corriente del AMT acerca de la naturaleza de tal pensamiento, tanto en lo que se refiere a cómo funciona en la mente de un matemático o cómo se desarrolla en la de un alumno, se habían limitado a las observaciones aisladas de unos pocos y señalados autores, por lo general ellos mismos matemáticos. Aunque una disciplina organizada de la didáctica de la matemática de nivel elemental o secundario con su

[3] En la sección 2.1 del Anexo se reproduce una lista de miembros. La vigencia del PME se manifiesta en la convocatoria de unos 800 investigadores a la próxima 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 37), en Alemania (Kiel University 2013).
[4] Los miembros prominentes: David Tall (United Kingdom), Tommy Dreyfus (Israel), Hans Freudental (Netherland) Michele Artigue (France), Colette Laborde (France), Shlomo Vinner (Israel), Guershon Harel (Israel), Ed Dubinsky (Israel), Nicholas Belacheff (France), Paul Ernest (Kingdom), David Pimm (United Kingdom), Richard Skemp (United Kingdom).

núcleo teórico y cuerpo de investigaciones se desarrolla en múltiples direcciones y corrientes en el siglo XX, su extensión a niveles más avanzados sólo se inicia en la década de los sesenta, mientras que en habla hispana se inicia en la década de los noventa en el Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona, para luego extenderse al Departamento de Ciencias de la Universidad de Salamanca, la Universidad de La Laguna, la Universidad de Valladolid y la Universidad de Lleida. Enfocados especialmente en la situación de los primeros cursos universitarios donde los profesores comprueban con cierta resignación el "enigma de que unos pocos tienen éxito con muy poco esfuerzo, mientras otros parecen condenados al fracaso" (Azcárate Giménez y Camacho Machín 2003, 144), se proponen analizar los procesos cognitivos implicados en la matemática avanzada tales como "abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptuar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar [...] a través del análisis de los currículums oficiales y de los libros de texto" (Id. 144). La línea de investigación constituye el núcleo fuerte de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) constituida en 1996.

2. Elección y suficiencia del marco

El sistema conceptual elaborado por el AMT se extiende sobre un territorio (pensamiento en matemática avanzada) que contiene la temática tratada en esta tesis. Sin embargo, la pertenencia a un área no alcanza para asegurar que los problemas mismos puedan ser formulados en los términos y en el lenguaje de la teoría. Por otra parte, no es el único cuerpo conceptual que aloja los procesos que se desarrollan en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática avanzada. No siendo entonces necesario, se quiere en este apartado probar su suficiencia y dar alguna noticia de que la elección de un marco alternativo conduciría al planteo de problemas de naturaleza diferente a los estudiados en esta tesis.

Los dos grandes programas de investigación hoy vigentes en el campo de la didáctica de la matemática avanzada son el denominado *cognitivo* (donde reside el AMT) y el llamado *epistemológico* (donde reside la TAD: *Théorie Anthropologique du Didactique*), según una racional reconstrucción –en el sentido de Lakatos– del campo. El análisis de la inconmensurabilidad –ahora en el sentido de Kuhn– de los dos programas (Gascón 2003b, 44-55) deja abierta y ejemplifica la posibilidad de que un problema de uno de los programas pudiera ser planteado al menos en algunos aspectos en los términos básicos del otro, aunque las respuestas difieran.

El programa cognitivista, actualmente en una etapa de su desarrollo que ha sido denominada *proceptual* por un representante del paradigma epistemológico (Gascón 2003b, 45), muestra en su evolución el tipo de precisiones que ha ido introduciendo para refinar sus técnicas y mejor delimitar su campo. Originalmente conforma un *conceptualismo*, que presenta el conocimiento como una red de relaciones con los conceptos en los nodos, luego incorpora la perspectiva *psicolingüista* para incluir la dimensión del lenguaje, para llegar al actual *proceptualismo*, que ya formula modelos de la construcción y desarrollo de los conceptos matemáticos. En esta dimensión, el conocimiento matemático puede ser tomado como un problema en sí mismo, y queda a la luz como un objeto de estudio. Al transitar por estas diversas perspectivas, las preguntas planteadas y los problemas que caen bajo el cono metodológico se van modificando.

Inicialmente, el conceptualismo partía de la noción de aprendizaje significativo en el sentido de Ausubel (1968) y los desarrollos de su discípulo Novak (1977). Formulaba las preguntas que se referían al tipo de estructuras cognitivas más o menos espontáneas de los estudiantes y su distancia con las estructuras formales del pensamiento matemático, y cómo tener en cuenta sus diferencias –o semejanzas– para un mejor aprendizaje significativo. Los procesos cognitivos sobre la red de conceptos son el objeto primario de investigación y se postula la decisiva influencia que, sobre esos procesos, tiene el sistema de enseñanza. Ese conceptualismo original, predominante hacia la década de 1970 y gran parte de la siguiente, se ve posteriormente enriquecido por la incorporación de la dimensión semiótica de las actividades matemáticas, orientación que ha dado en llamarse psicolingüística, el principal fenómeno de estudio es el desacuerdo entre los significados asignados por los lectores y aquellos que son los propios del texto matemático. Ahora la pregunta es cómo presentar la información para permitir a los estudiantes construir una red semántica de los símbolos y las operaciones matemáticas, para que puedan concebir el lenguaje tanto el resultado de una actividad conceptual como un instrumento de resolución de problemas. Se trata de investigar el papel de los símbolos en la apropiación por los estudiantes de las ideas básicas del álgebra y el cálculo. También se pone de manifiesto, desde esta perspectiva, que muchos objetos matemáticos no son conceptos (Gascón 2003b).

Las concepciones conceptualistas y psicolingüistas son completadas en la última etapa denominada proceptual, cuya aparición se remonta hacia 1985 con la aparición del grupo de trabajo que dio origen al AMT (*Advanced Mathematical Thinking*). Esta concepción introduce un modelo de los procesos cognitivos construido a través de una noción central, denominada *procepto* que da cuenta de la naturaleza dual y ambigua de los objetos matemáticos y que explica el papel de las definiciones en los procesos de pensamiento de la matemática avanzada, que requieren de una flexibilidad muy alejada de los procesos rígidos que se instalan en la matemática elemental (Parsons 2008, Houston 2012). Los estudiantes –dicen los teóricos del AMT– enfrentan en este nivel la obligación de definir en lugar de describir, de efectuar pruebas formales en lugar de convencer con un argumento plausible; las pruebas mismas deben ajustarse a una sintaxis gramatical con control de la consistencia de inferencias desde premisas.

En esta Tesis, el *procepto* desempeña una papel especial en la caracterización de la abstracción y es utilizado intensamente en el capítulo 4 (Abstracción); en cambio, en el capítulo 6 (Demandas y estilos), es el modelo de conocimiento desplegado a través de las nociones de concepto-imagen y concepto-definición el que domina; por último, la descomposición de una definición en sus componentes intensionales atraviesa todo el capítulo 5 (Intertextualidad matemática).

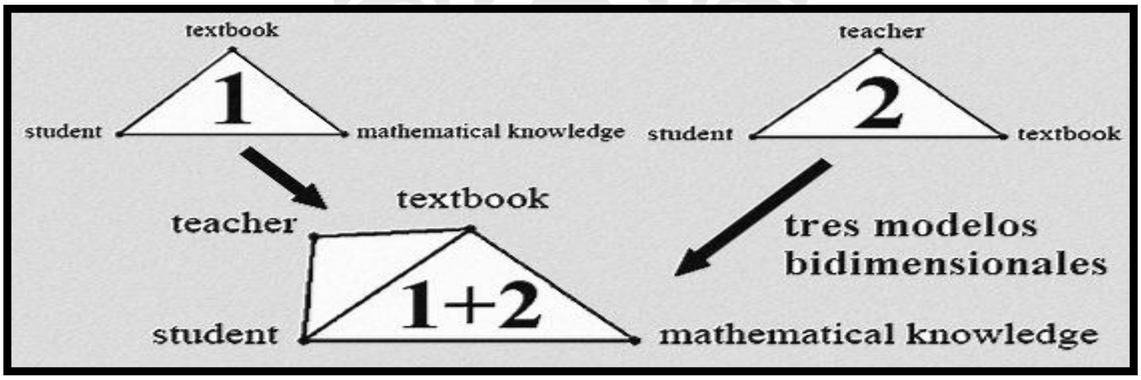
El programa epistemológico, iniciado por Guy Brousseau con la teoría de las situaciones didácticas, y en el que también se incluye la teoría antropológica de lo didáctico (ambas podrían ser consideradas teorías rivales ya que comparten el paradigma epistemológico), construye sus problemas con otro centro. El programa cognitivo considera el conocimiento matemático sin tomar en cuenta lo que el programa epistemológico denomina la relatividad institucional, y que básicamente consiste en tomar como objeto no el conocimiento C como algo dado, sino más bien la pareja (C, I), donde C el es conocimiento que se enseña en la institución I. El conocimiento no es absoluto, sino que es conocimiento en tanto es preparado para ser enseñado con un cierto alcance determinado por un dado *curriculum* en una establecida institución. El cambio de perspectiva es profundo, y como consecuencia, el lenguaje y los problemas se modifican fuertemente; nociones como la de *praxeología* por completo ajenas al cognitivismo son aquí nucleares (Chevallard 1999b, Chevallard 2009c, Chevallard 2002b, Brousseau 2007, Brosseau 2006a).

Puede evidenciarse la diferencia entre ambos enfoques considerando uno de los problemas abordados en esta tesis, en el capítulo 4 (Abstracción), que analiza la evidencia empírica de los rasgos diferenciales de la abstracción propios de la matemática avanzada, recorriendo diversos conceptos en los libros de texto. El eje de análisis es allí la relación entre los textos y su contenido matemático, y en el marco del cognitivismo, los fenómenos se expresan y explican en lenguaje de *procepto* y de los *tres mundos de al matemática*, ambos términos técnicos introducidos por el AMT. Como consecuencia del análisis queda el registro de los intrincados procesos de altas demandas cognitivas que exigen una gran flexibilidad del lector para dar cabida a objetos cada vez más concentrados y cargados de información, de una manera original, que no se da en el llamado pensamiento matemático elemental. Esta diferencia se presenta como una *explicación* de las dificultades que encuentran los lectores noveles con los textos especializados de la formación básica. El pensamiento matemático elemental, dice el programa cognitivista, no ejercita la ambigüedad del símbolo en su dimensión de proceso y concepto (es siempre un proceso) y los objetos con los que trabaja son caracterizados por descripciones que en el mejor de los casos podría considerarse una especificación incompleta. La TAD, en cambio, daría una explicación distinta que podría resumirse diciendo que las dificultades surgen por la ausencia de una institución que desarrollase praxeologías locales que permitieran la transición entre las praxeologías puntuales de la enseñanza media y las praxeologías regionales de la enseñanza universitaria (Gascón 2003b, 50-54). Puede comprobarse que las explicaciones difieren en los términos, y que hasta cierto punto es difícil decir lo que tienen –si lo tienen–en común.

Tras esta comparación de teorías, puede decirse que el fundamento de la inscripción del marco teórico de esta tesis en el paradigma cognitivo reside menos en el área de estudio que en sus mismos propósitos, que se mantienen orbitando alrededor de los libros de texto en su relación con los contenidos matemáticos, considerados estos como relativamente independientes de las instituciones donde son enseñados. Es esta relativa independencia institucional la que, de hecho, deja esta tesis fuera del paradigma epistemológico, cuyo postulado es precisamente lo contrario. Los objetos matemáticos juegan un papel central en esta investigación: se pregunta cuán abstractos son o se ven en los libros de texto, cómo son afectados por las presentaciones en esos textos y qué demandas cognitivas potenciales son emitidas desde los libros de texto –donde residen esos conceptos– hacia los lectores que procuran apropiárselos. Pero nunca se pregunta cómo son efectivamente enseñados en una institución universitaria, cuáles son las diferencias, por ejemplo, entre lo que podría llamarse "el límite de la Universidad de Buenos Aires" y "el límite del Massachusetts Institute of Technology"; si esa fuese la pregunta, la elección del cognitivismo sería inadecuada. Asegurada la consistencia entre el marco teórico y los objetivos, se muestra ahora su suficiencia para producir los instrumentos apropiados a la población de problemas que se plantean, una cuestión casi tautológica, desde que los problemas mismos no son anteriores a la teoría, sino solo construibles dentro de esa teoría que permite nombrar, diferenciar, y relacionar los conceptos que produce.

En la trigésima conferencia del *Psychology of Mathematics Education*, un investigador del Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Giessen (Rezat 2006, 409-416) presenta un modelo para identificar los actores que entran en contacto con el libro de texto, conforme a los supuestos del AMT, modelo que se construye a partir de los esquemas representados en la Figura 1.

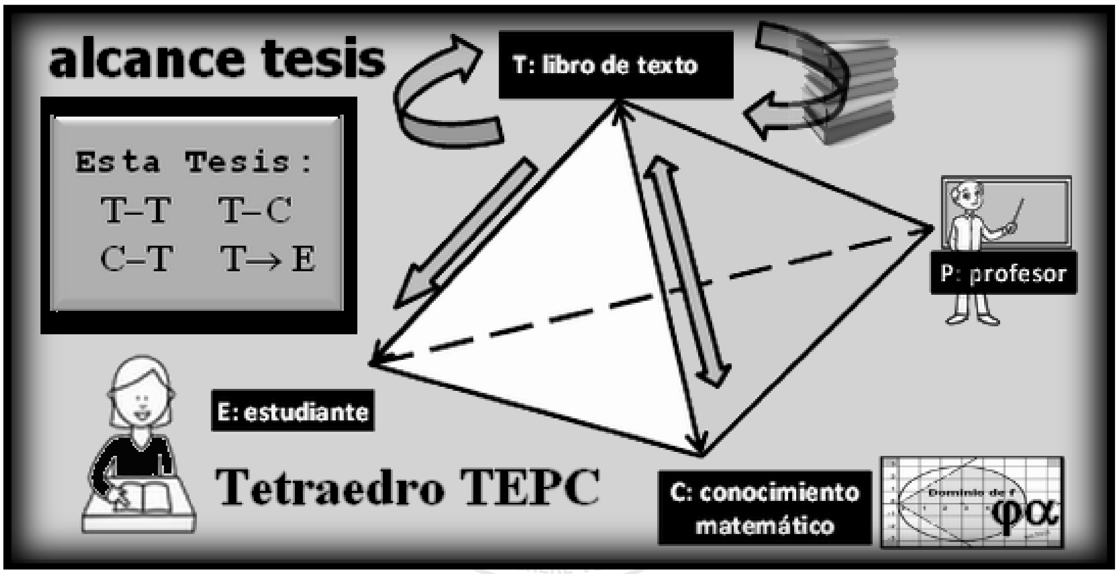
Figura 1. Los tres modelos 2D de interacciones en las que interviene el libro de texto: el tercero es una primera aproximación a un modelo 3D que permita una completitud en el espacio de relaciones de los cuatro actores: profesor, texto, estudiante, conocimiento (Rezat 2006)



Fuente: elaboración propia a partir de *A model of textbook use* (Rezat 2006)

El modelo etiquetado como (1) en la figura responde al esquema clásico de Vygotsky de un objeto (el conocimiento matemático) que es apropiado por un sujeto (el estudiante) a través de un artefacto intermediario (el libro de texto); también deja lugar para las posibles interpretaciones de los restantes lados del triángulo. El modelo (2) transforma cualitativamente el libro de texto, que ya no es un instrumento de mediación sino el objeto de una actividad, en la que el profesor puede interpretarse como el mediador. El modelo (1) + (2) se expande a un cuadrilátero para intentar recoger las relaciones en su mayor amplitud. El vértice del profesor puede ser interpretado de al menos dos maneras: el profesor interviene en el uso del texto por parte del alumno, o bien el profesor es un usuario directo del libro de texto con el que diseña y estructura sus clases. Es para incluir todas estas posibilidades que surge un modelo tridimensional que saca al libro de texto del plano permitiendo entonces relaciones directas e indirectas con los restantes vértices, lo que da lugar al modelo elaborado del tetraedro tal como se ve en la Figura 2, elaboración que permite situar las relaciones cubiertas por esta tesis.

Figura 2. La situación y alcance de esta Tesis en el modelo tridimensional del tetraedro del libro de texto (Rezat 2006): la arista texto–contenido es recorrida bidireccionalmente, mientras que la arista texto–estudiante solo se examina unidireccionalmente



Fuente: elaboración propia

Designando los vértices del tetraedro de la Figura 2 con T (texto), E (estudiante), P (profesor), C (conocimiento), resultan dieciséis relaciones binarias ordenadas que potencialmente podrían ser objeto de estudio, y cuatro relaciones ternarias no ordenadas, en correspondencia con cada una de las cuatro caras del tetraedro. A modo de ejemplo, la cara TPC representa los usos que el profesor hace del libro de texto: en este subsistema el profesor es el sujeto activo, siendo uno de sus objetos los aspectos didácticos del conocimiento presentado en el texto (Rezat 2006, 409-416).

Esta tesis puede ubicarse en este espacio teórico 3D como desplegándose en las aristas indicadas por flechas en la Figura 2. Las relaciones T ↔C entre el libro de texto y el conocimiento matemático son analizadas, en sus dos direcciones, a lo largo de los tres capítulos centrales, donde se tratan las cuestiones de cómo ingresan y se presentan los conceptos en los textos. Las relaciones T-T entre los mismos textos se estudian de modo especial en el capítulo 5 (Intertextualidad) puesto que se mantiene fijo un concepto para hacer pasar por él los textos, y de modo derivado se tienen en cuenta en el capítulo 6 (demandas y estilos) al crearse un espacio 2D que permite una comparación de los textos a lo largo de dos dimensiones. Finalmente, la relación (orientada) T $\rightarrow$ E es específicamente tratada a través de las demandas cognitivas del capítulo 6, donde se establece una medida de la calidad de los procesos que un dado texto requiere sean activados para su comprensión.

El carácter orientado de esta última relación alude a que no se estudia la relación simétrica E$\rightarrow$T; el concepto de demanda cognitiva, entonces, debe entenderse como una demanda exigida por el texto y desde el texto. Deja sin tratar, entonces, el aspecto de la calidad y medida de la dificultad que, a un dado estudiante, le exija el logro efectivo de esas activaciones, problema que naturalmente es ya dependiente del individuo y de sus conocimientos previos.

La construcción del concepto *demanda cognitiva* llevada a cabo por los teóricos del entorno conceptual adoptado, se entiende como un atributo inferido del texto, y si bien es una variable que alcanza la categoría de ordinal, no se sigue de ello que un texto con mayor demanda cognitiva que otro sea vivido como más ‘demandante’ por cualquier par de estudiantes. La afirmación es más débil: si un texto tiene mayor demandas cognitivas que otro, le será al *mismo* estudiante más exigente que el otro. Es por ello que en la Figura 2 no está señalada una flecha como un lazo en el vértice del estudiante (E), dado que no se analizan distintos tipos de estudiantes, como sí se analizan distintos tipos de libros, y de allí el lazo indicado en el vértice T.

Tampoco se señala con un lazo la relación C $\leftrightarrow$ C, dado que hacerlo equivaldría a hacer matemática, a poner en relación los distintos conceptos estudiados. Por supuesto que se analizan estas relaciones *en* los textos, pero solo para mostrar cómo los diversos autores las presentan y qué supone desde la perspectiva de la abstracción y las demandas cognitivas. De hecho, C $\leftrightarrow$ C es ya matemática, y no un elemento de estudio en sí mismo de la teoría AMT. Las relaciones en las que interviene el profesor están completamente ausentes en este estudio[5].

Por todo lo anterior puede asegurarse la suficiencia del marco teórico del AMT para este estudio, ya que los objetos que analiza (Textos, Conocimiento matemático) y las relaciones binarias Texto $\leftrightarrow$ Conocimiento, Texto $\leftrightarrow$ Texto, Texto $\rightarrow$ Estudiante caen dentro del alcance del sistema conceptual AMT. Por la discusión precedente respecto al paradigma epistemológico, puede decirse que además de suficiente es una

---

[5] Curiosamente, sin embargo, es una de esas relaciones la que de hecho permite su construcción: el autor de esta tesis es un profesor que toma como objeto de estudio los libros de texto. Pero esta relación, que construye la tesis, no está en la tesis misma, no es un objeto estudiado ni se hace ninguna mención o proposición acerca de ella, excepto esta nota de pie de página.

elección consistente y adecuada con sus objetivos, sin llegar a ser necesaria, como lo prueban las dos explicaciones del fenómeno del diferencial de abstracción. Por otra parte, la tesis cabe con cierta holgura en el marco, permitiendo ampliaciones del núcleo estudiado sin salirse del entorno conceptual.

El carácter de cubrimiento y holgura del marco teórico de los objetos de estudio de esta tesis pueden ponerse de manifiesto considerando el tetraedro desde una perspectiva matemática, como representando el grafo (orientado) de potenciales relaciones y tratarlo matricialmente a través de su matriz de incidencia (Golumbic y Harman 2012, Wilson y Watkins 1990, Diestel 2012), para designar las zonas cubiertas por el AMT y las zonas ocupadas por esta tesis. Una panorámica de lectura más directa se tiene incluyendo en la matriz la dimensión del color, como en la Figura 3 que muestra en negro las relaciones cubiertas por el AMT, con blanco las que están fuera de su alcance y con el término 'tesis' las áreas tratadas en este estudio.

Figura 3. Matriz de incidencia del tetraedro de Rezat (2006, 409-416) que muestra la inclusión conceptual de la tesis en el campo alcanzado por el AMT (*Advanced Mathematical Thinking*)

	Texto	Conocimiento	Estudiante	Profesor
Texto	tesis	tesis		
Conocimiento	tesis			
Estudiante				
Profesor				

AMT : ■ No AMT : □

Fuente: elaboración propia

La holgura del marco teórico respecto de la tesis queda evidenciada por la cantidad de celdas no tratadas en este trabajo, y que son a su vez posibles hilos abiertos para una extensión y profundización. Por ejemplo, la celda (vacía) que se encuentra en la posición Estudiante–Conocimiento abre preguntas directamente vinculadas como las siguientes: ¿qué otros artefactos, distintos de los libros de texto, median entre el conocimiento matemático y el estudiante? ¿Qué diferencias en cuanto a demandas cognitivas presentan respecto de los libros de texto? Si las preguntas anteriores caben en el AMT, en cambio, todas las cuestiones que involucran a las instituciones donde estos procesos cognitivos tienen lugar ya quedan decididamente fuera: no solo fuera del modelo del tetraedro, que no incluye el contexto donde tiene lugar, sino fuera del AMT, cuyo marco conceptual no permite tornar visible el concepto como objeto institucional.

Por ejemplo, un estudio de cómo la diferencia en la cualidad de la abstracción obra sobre la población de alumnos que ingresa a una institución universitaria de acuerdo a sus conocimientos previos, y qué tipo de consecuencias *también* en el aspecto matemático mismo eso supone para la institución. Ese hipotético estudio ocuparía la celda Conocimiento–Institución en un modelo ahora 4D, con un vértice en la cuarta dimensión. Los conceptos y los métodos derivados necesarios son ya muy diferentes, como puede verse en *Mathematical Literacy* (Solomon 2009).

3. Nociones generales del AMT

Esta sección presenta características muy generales –y simplificadas– de los desarrollos del *Advanced Mathematical Thinking* pertinentes a este estudio; los detalles son presentados en cada uno de los tres capítulos que aprovechan sus conceptos para la construcción de herramientas de análisis.

La *abstracción*, "esa especialidad de los científicos en general, y de los matemáticos en particular ha sido desde siempre una actividad muy apreciada por su capacidad de engendrar generalizaciones provechosas" (Sfard 2008, 9); al mismo tiempo, se la ha responsabilizado de generar una brecha muy difícil de salvar por los estudiantes que se inician en los procesos del pensamiento matemático avanzado. No sin cierta inconsistencia, también se considera que la mente humana tiene una natural tendencia a organizarse según categorías que plasman reconocidas o adjudicadas regularidades a su experiencia. Si la abstracción es una tendencia natural, si es también cotidiana, es necesario explicar porqué podría ser también fuente de dificultades de la magnitud que se le adjudica. Cuando el matemático Poincaré declara "yo no comprendo a los que no comprenden la matemática" (Queneau 1978, 89) funda su opinión en que lo matemático está en la estructura misma del espíritu humano.

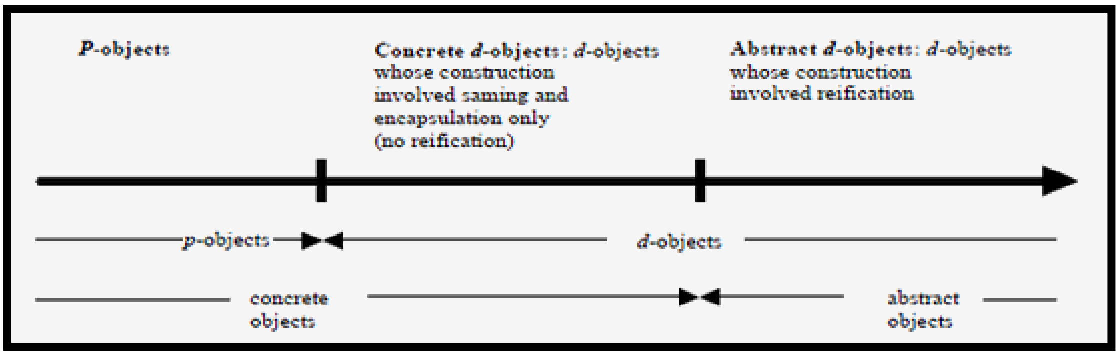
La abstracción se convierte entonces, ella misma, en un objeto de estudio. Y lo que la teoría del AMT exhibe es que el término se dice de fenómenos de distinta intensidad, y sobre todo, de distinta naturaleza. Y entonces se introducen una serie de distinciones que pretenden especificar qué hay en la abstracción matemática de nivel superior que no haya en la abstracción de la matemática elemental, o en la del leguaje cotidiano. Los términos del lenguaje habitual son en sí abstracciones, con la posible excepción de los nombres propios, pero de un tipo bastante diferente al de las abstracciones de los matemáticos. La operación de asignar un nombre a una clase de objetos 'reales' produce términos abstractos como 'cuadrúpedo', que se predican de una clase antes que de un individuo (Mason y Johnston-Wilder 2004, Mitchelmore y White 2004); a este tipo de abstracción se le denomina *abstracción empírica*. Pero luego, existen términos para designar las relaciones que hay entre estas clases, y de allí pueden crearse términos que tratan de las relaciones entre estas relaciones despegándose del sustrato original que les dio origen. En el primer caso se está introduciendo una clasificación entre un conjunto de objetos cuya naturaleza –y existencia– no se cuestiona o se admite como hipótesis. Las abstracciones que consisten en propiedades de las relaciones o relaciones entre relaciones se denominan *abstracción teórica*, para diferenciarla de la empírica. La abstracción empírica puebla la mayoría de las palabras del lenguaje cotidiano, mientras que las teóricas dominan el discurso científico, y en especial, el discurso matemático.

Los teóricos del AMT han elaborado la distinción con una referencia explícita a Piaget, no sin destacar la singularidad de que el mismo que examinaba los procesos de pensamiento en los niños, fuese quien más tuviese que decir en lo que respecta a la abstracción en el nivel universitario. La idea piagetiana, con alguna simplificación, es que el nivel de abstracción puede medirse –en sentido figurado, claro– por la longitud de los caminos, en el espacio y en el tiempo, que el sujeto debe recorrer para descubrir el significado objetual de un término (Piaget 2003, 21). Piaget denominaba a este tipo de abstracción como *reflexiva* para dar cuenta que se abstraían ya no propiedades de los objetos primarios, sino propiedades de relaciones entre esos objetos. Otro antecedente destacado de la distinción es Cassirer: objeto–cosa y objeto–relación son los nombres que elige para remarcar el peso que tiene en un caso una cosa percibida y en el otro una relación inferida (Cassirer 1953, 4-20). En cualquier caso, ya en el AMT se tiene una medida de los procesos de abstracción por la introducción de un marco a una teoría general de la abstracción a través de los *mundos de la matemática* (Tall 2004a, Tall 2004d, Tall 2005g, Tall 2011): la abstracción de un dado concepto estará vinculada a la necesidad y conveniencia de atravesar los tres mundos de la matemática en diversos registros semióticos.

Una vez definida la diferencia cualitativa, la teoría introduce, ya en el seno de la abstracción teórica, una diferenciación de grados, en un progreso que supone la creación de un lenguaje propio con sus sintaxis y gramática formal que no resulta de lectura sencilla al estudiante que se inicia en sus textos. La precisión del lenguaje contrasta con una cierta flexibilidad que se le exige al lector en su interpretación, a lo que se añade que las presentaciones en los libros de texto rara vez coinciden con los procesos que han dado origen a los conceptos introducidos (Tall 1991a, xvi). El manejo de la ambigüedad en la lectura es uno de los rasgos que diferencian el pensamiento matemático avanzado del elemental, más rígido al momento de asignar significado a la escritura simbólica (Byers 2012). La teoría ha creado un concepto especial para tenerlo en cuenta: el *procepto*, contracción de los dos aspectos que íntimamente están contenidos en un concepto representado por un símbolo: un *proceso* y un *concepto objetivado*. El concepto es un objeto cuando interviene como argumento de un proceso que lo absorbe como argumento en un nivel superior, mientras que es un proceso cuando remite a una serie de acciones que permiten obtenerlo como resultado. El término ha resultado tan central, que *proceptualismo* toma como sinónimo de AMT.

Los autores han descripto con mayor o menor detalle los componentes de este *procepto* y no siempre con los mismos nombres. Por ejemplo, Anna Sfard descompone en tres momentos el mecanismo de la abstracción: la *identificación* –se le asigna un nombre– de una clase de objetos hasta el momento no reunida en una noción de semejanza según alguna categoría, es seguida de los momentos de *encapsulado* y *reificación*, que dejan el concepto como un singular objeto a ser reutilizado en nuevas secuencias; las tres nociones se completan con la de *p-objetos* (objetos primarios: cualquier ente perceptualmente accesible) y *d–objetos* (objetos discursivos: los que han sido definidos en un discurso) distinción que no coincide con la de objetos concretos y objetos abstractos (Sfard 2008, 170, Sfard 1991, Sfard 1989).

Figura 4. Un esquema de los tres momentos de la abstracción: los objetos discursivos abstractos se logran por la asignación de un nombre que es luego encapsulado para ser convertido en objeto por el proceso de reificación. Los objetos concretos pueden ser tanto perceptuales como discursivos (Sfard 2008, 173)



Fuente: reproducción de *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing* (Sfard 2008, 173)

El esquema de la Figura 4 nuevamente manifiesta la distancia entre dos tipos de objetos; pero en el discurso matemático, el esquema debe verse como periódico, una vez que se tiene un objetos discursivo, pueden crearse nuevos mediante definiciones. Se comprende que la distancia entre los nuevos conceptos así obtenidos y los originales termine aumentando lo suficiente como para que ya no resulte económico ni conveniente desenvolver el significado primitivo cada vez que ese término interviene en el discurso. Sin embargo, la posibilidad de que el conocimiento matemático en cualquiera de sus niveles pudiera no proceder de la experiencia cotidiana, “no la descalifica como una de las fuentes de comprensión de la matemática” (Kinard y Kozulin 2008, 27), lo que ha devenido en una inversión del enfoque más popular del constructivismo. En ese enfoque, se sugiere comenzar por las experiencias cotidianas y entonces intentar introducir un cambio conceptual. Pero el proceso inverso está también habilitado: comenzar por la construcción de un concepto matemático y luego aplicarlo (en su lenguaje y procedimientos) a las situaciones diarias, tal como lo sugieren autores del *Rigorous Mathematical Thinking* (Kinard y Kozulin 2008, 27). Las posiciones anteriores son independientes de la postura que se quiera adoptar acerca de la naturaleza misma de estas relaciones, y hasta cierto punto, de su misma existencia, esto es que valen como modelos explicativos de influencias, antes que como definiciones constitutivas (Penrose 2011, 41-45).

En el lenguaje de Dubinsky (Dubinsky y McDonald 2000, Dubinsky 1991), que suele simbolizarse con la sigla APOS (*Action-Process-Object-Schema*), las acciones son concebidas como transformaciones físicas o mentales que el actor ejerce sobre los objetos. Estas acciones reciben el nombre de *procesos* cuando son interiorizadas para luego ser *encapsuladas* para formar un nuevo *objeto*. El todo organizado de esas acciones, procesos y objetos recibe el nombre de *esquema*, y la introducción de una definición en un esquema (esto es, la presentación de un nuevo objeto) iniciaría un nuevo ciclo APOS para lograr la consistencia entre los anteriores objetos y el añadido. Es por ello que el lenguaje formal conduce a definiciones donde los conceptos quedan cristalizados como objetos sólidos, constituyendo “una soberbia sistematización de la matemática, pero cognitivamente conflictiva con el desarrollo de los procesos matemáticos que conducen a los objetos matemáticos a través del proceso de compresión llamado encapsulado” (Tall 1994, 8).

David Tall (Tall 1994, 8, Tall y Katz 2011, 2-9, Tall 1991b, 3-21, Tall, Gray, y otros 2001a) considera en las transformaciones anteriores la dimensión de la compresión de la información. Parte de reconocer que el lenguaje cotidiano es ya una forma de reducir la información para reunir en un nombre una clase más o menos borrosa de elementos. Luego observa que el simbolismo matemático – en tanto lenguaje – también cumple esa función. Pero añade algo más sutil que raramente se utiliza en el lenguaje corriente, y que es ilustrado por el mismo autor mediante el sencillo ejemplo mediante el cual el *proceso* de contar, que es sucesivo (dinámico) y origina números ordinales, se transforma en un *concepto* que es simultáneo (estático), el de número cardinal. De este modo se ha producido la transición del *pro*ceso de contar al *concepto* de número.

La *definición* de un concepto procura dar una nota característica de un conjunto de objetos que la satisface. Ese conjunto es la extensión del concepto, mientras que la nota misma es la intensión del concepto. Por supuesto, la intensión puede ser bastante compleja y a veces resulta necesario considerarla en sus componentes intensionales, tal como en esta tesis se explota en el capítulo 5 (Intertextualidad matemática). La definición es considerada en dos aspectos que reciben los nombres de *definición del concepto* e *imagen conceptual*, el primero en el plano formal y discursivo, el segundo en el plano de las representaciones que la definición formal le sugiere a un dado sujeto. Mientras que el primero es universal, el segundo es individual. Estos dos aspectos son introducidos para remarcar que las definiciones perfectamente construidas de los objetos matemáticos no son lo primero que el lector se representa. La distancia entre ambas es normalmente reducida por los sucesivos acomodamientos que las actividades que exigen de la definición formal producen en el sujeto. Y la demanda cognitiva de esas actividades estará en relación directa con la intensidad en que sea necesario una consulta a la definición formal para resolverlas. El muy conocido caso del concepto de *función* es un ejemplo de la distancia entre la definición rigurosa en el lenguaje de conjuntos y relaciones –a la que se llega tras cuatro mil años de desarrollo (Nardi 2012, 166, Nardi y Iannone 2013)– y la imagen más presente en los estudiantes de la función como una fórmula que produce resultados cuando se sustituyen sus símbolos por valores.

Un esquema de la separación entre los códigos verbal y no verbal se presenta en la Figura 5. El esquema debe ser entendido como un equilibrio dinámico a largo plazo, en el que las conexiones de la red conceptual que permite establecer la definición del concepto (red esquematizada mediante los rectángulos interconectados del panel izquierdo) son puestas en correspondencia con la red de representaciones mentales evocadas por el concepto mismo (red esquematizada mediante la conexión de los óvalos en el panel derecho), cada uno con su lógica interna (conexiones dentro del panel), son puestos en relación (conexión entre paneles) cuando así lo exige una actividad.

Figura 5. La definición en los dos planos: plano discursivo-verbal (panel izquierdo) y plano de las representaciones (panel derecho)

Fuente: elaboración propia a partir de *The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics* (Vinner 1991, 68)

Las sucesivas vivencias de comprensión del concepto, y el desarrollo mismo a través de otras experiencias del individuo van actualizando el panel derecho, y la consulta al panel de la definición sólo procede ante experiencias que revelen alguna divergencia o incompatibilidad inaceptable entre ambos. Debe verse el esquema de la figura con cierta flexibilidad para alcanzar todas las posibilidades, como podría suceder si uno o ambos paneles se encuentran vacíos: “el panel de la imagen conceptual debe considerarse vacío hasta tanto no se haya asociado algún significado al nombre del concepto, lo que sucede en todas las situaciones en las que la definición conceptual es memorizada sin comprensión alguna de su sentido” (Vinner 1991, 70). En esta tesis, este esquema se aprovecha en el capítulo 6 (Demandas y estilos), para la construcción de un espacio bidimensional obtenido por reducción del espacio de propiedades: la reducción opera según que se establezca o no la conexión horizontal entre los paneles.

En lo que respecta a las actividades que los libros de texto proponen a los lectores, del concepto de procepto se desprende que la transición del proceso al concepto no opera automáticamente, sino que debe ser estimulada y exigida. Un conjunto de ejercicios que pueda ser resuelto sin la necesidad de la información comprimida en el concepto, activará procedimientos automáticos suficientes para responderlos mediante procesos de rutina, lo que resulta no sólo esperable sino también una eficiente respuesta a ese nivel de demandas cognitivas: “este uso de la memoria mediante procedimientos secuenciales rutinarios es una valiosa herramienta humana cuando los procesos mentales a ser manipulados no necesitan ser procesados simultáneamente" (Tall 1994, 8). El hábito anterior puede instalar cómodamente a los lectores en el mundo de los procedimientos, y provocar respuestas insatisfactorias cuando las actividades exigen ya la compresión de la información en definiciones conceptuales que puedan a su vez ser procesadas simultáneamente: podría suceder que los estudiantes continúen con procedimientos ineficientes y costosos, que solo arduamente y en escasas ocasiones producen un resultado aceptable cuando se los utiliza en el nivel equivocado.

Las peculiaridades de los conceptos matemáticos convierten a los libros de texto de matemática en piezas también singulares respecto a textos de otras disciplinas. Sin, embargo, queda un espacio entre la matemática y el texto de matemática, y es en ese lugar donde el autor imprime sus concepciones, a veces de modo explícito, y siempre de modo implícito, por el mero hecho de organizar el material en una estructura de presentación entre otras muchas igualmente posibles.

Una de las cuestiones que trae aparejada la compresión de conceptos en las definiciones, es la escasa posibilidad que tiene el autor de escribir con una cierta redundancia; esto es, que toda vez que aparezca un concepto ya definido que va a funcionar como objeto para crear nuevos conceptos, habrá de suponer que la encapsulación y reificación necesaria ya se haya hecho operativa en el sujeto que lee. De no hacerlo así, la longitud del texto seguiría una progresión exponencial. Esta ausencia de redundancia prohíbe una práctica que es muy valorada en otras lecturas: la de seleccionar aquellos pasajes que interesan al lector que se guía por lo que quiere aprender y no por cómo está organizado el texto (Houston 2012, 14-21). En un texto de matemática, en cambio, las omisiones solo conducen al pronto abandono de la lectura, al ingresar en recorridos en que el mensaje deja ser legible.

Puede tomarse el ejemplo de esta tesis, que solo muy ocasionalmente es un texto de matemática (lo es en un pequeño pasaje del capítulo 5): la redundancia está presente en todos los capítulos y en más de una ocasión en cada uno. El motivo es que el género 'tesis' debe admitir lectores que no estén interesados en el conjunto, sino en determinados segmentos, y para ellos, escribir la sigla AMT sin ninguna referencia próxima a *Advanced Mathematical Thinking* no es razonable, si se considera que el incremento de espacio de las tres palabras no es excesivo. Pero en matemática una expresión inocente como 'el $\mathbb{K}$–espacio vectorial $\mathbb{V}$' no puede estar acompañada de una referencia explícita próxima que llevaría a detallar el significado de dos decenas de axiomas: la referencia se torna tan extensa que no es practicable. Los autores manejan esta dificultad de muy diversas maneras y de allí resultan otros tantos diversos textos. Un libro de texto de redundancia nula, del que se reproduce un fragmento en la Figura 6, sirve de ejemplo. El concepto de *punto de acumulación* y el de *punto interior* debe estar ya incorporado. Con ser de redundancia nula, sin embargo, el texto planta señales (precedidas por '§') para el lector que quiera recuperar esos significados (lo que lo obliga no solo a tener en su mano ese libro sino también el Tomo II, que es donde residen las definiciones). En la mayoría de los casos, los autores también omiten la referencia posicional.

Figura 6. Un ejemplo de texto sin redundancia: los objetos referidos se dan por conocidos

DEF. 1. Conjunto *cerrado* es el que contiene todos sus puntos de acumulación (§ 64-4, def. 4). Conjunto *abierto* es el formado por puntos interiores (§ 64-4, def. 5). Los designaremos

Fuente: Anális Matemático III. Análisis funcional y aplicaciones (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1965, 6)

No siempre los textos omiten explicaciones por razones de brevedad; que grandes matemáticos pueden escribir oscuramente lo prueba el caso de Pierre-Simon Laplace, que cuando no recordaba los pasos por los que había alcanzado un resultado, escribía 'se ve fácilmente que', costumbre que habrían heredado algunos autores de libros de texto (Kline 2012, 116). Una manera de manejar la escasa redundancia puede consistir en la introducción de una notación global para todo el texto: una lista de símbolos y sus significados que precede al texto y al que el lector pueda remitirse. Sin embargo, también aquí las elecciones son muchas; una gran cantidad de símbolos adjudicados a una notación global, con significado fijo a lo largo del texto tiene la ventaja de reducir la longitud del texto, pero lo hace a costa de "cargar un fardo en la memoria del lector" (Steenrod, y otros 1975, 6).

La comunicación escrita de los contenidos matemáticos en un libro de texto no se limita a una consignación de ciertos hechos sobre un papel que luego son recogidos por un lector para incorporarlos a su entendimiento. Tanto el autor como el lector se hallan cargados de expectativas respecto a aquello en que consiste el objeto, además de expectativas mutuas entre sí: el autor acerca del tipo de lector, el lector acerca del tipo de escritura. Se sabe que lo que el lector pueda interpretar acerca de lo que lee está condicionado, y en ocasiones puede estar completamente determinado, por los recursos con que cuenta para decodificar el lenguaje y sus expectativas de lo que espera como un lenguaje apropiado para su comprensión. La distancia entre las expectativas de los alumnos y los sobrentendidos del autor de libro de texto puede no ser pequeña y representar en sí un obstáculo a la apropiación de lenguajes que no debe resultar subestimado: “las concepciones de los alumnos referentes al significado de la situación y las formulaciones que están vinculadas con él, se encuentran lejos de las de los expertos que proponen o utilizan el lenguaje. En consecuencia, el choque con esas concepciones instala un problema de aprendizaje delicado” (Johsua & Dupin, 2005a, pág. 282).

El AMT subraya que, si bien el principal propósito de un libro de texto es presentar la estructura formal de la matemática, hay un segundo propósito cuya importancia es casi la misma: ofrecerle al lector un modo de que él pueda ajustar esta nueva estructura con las suyas propias, de manera que queden incorporadas como instrumentos de trabajo. Es por ello que todo texto es un entramado de dos partes: en una se encuentra la matemática misma (con sus definiciones, teoremas y pruebas) y en la otra el material informal (motivaciones, analogías, explicaciones metamatemáticas…) y entre ambas se desarrolla el libreto que el lector recorre (Steenrod, y otros 1975, 1). Según la intensidad con la que estos dos segmentos se diferencien se habla de los *estilos* de prosa matemática. La diferenciación entre las partes permite, por lo menos, decidir a un lector cuáles no son de su interés y pueden omitirse, sin pérdida esencial para en la comprensión. El concepto de *estilo* de prosa constituye una de las variables analizadas en el capítulo 6 (Demandas y estilos) de esta tesis.

CAPÍTULO 3

MATERIALES Y MÉTODOS

1. Introducción

La estructura de esta tesis es modular. La definición de la población de materiales, los criterios y la selección de muestras y la aplicación de técnicas para extraer datos sobre los que efectuar los análisis conducentes a los objetivos, y las inferencias acerca de la medida en que los hallazgos sobre las muestras son predicables de la población: todo este conjunto es detallado localmente en cada capítulo conforme a su objetivo específico.

En este capítulo solo se presentan las cuestiones globales que permiten una visión panorámica de la partición del conjunto completo de materiales, y las diferencias específicas que caracterizan los métodos conforme a esa partición. A través de cada uno de esos capítulos, la técnica aplicada es la misma: el *análisis de contenido*. La elección de la técnica es la consecuencia natural de los materiales (los textos de matemática avanzada) y los objetivos (naturaleza de sus relaciones con el conocimiento y el estudiante) que requieren de conceptos teóricos centrales del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*).

Lo que debe entenderse por *análisis de contenido* puede variar bastante según las perspectivas o los acentos que sobre sus rasgos esenciales pongan los autores. La profesora Kimberley Neuendorf, de la Universidad de Cleveland recopila ocho definiciones de sendas publicaciones en el período de cincuenta años que corre entre 1952 y 2002 en las que se advierte que las diferencias no se reducen a la presentación sino que afectan a la naturaleza misma del objeto definido (las definiciones se reproducen en el apartado 3.1 del Anexo).

Los textos clásicos de análisis de contenido por lo general dedican una discusión a esta multitud de definiciones para fijar los términos en los que se mueven sus supuestos (Neuendorf 2012, Krippendorff 1990, Weber 2012, Leray 2008), y para esta tesis resulta conveniente una precisión semejante, dado que afecta a lo que es sujeto del análisis y a los estándares de confiabilidad sobre esos análisis. Las definiciones pueden dividirse gruesamente según que ese *contenido* se considere como un atributo inherente al texto mismo –es algo que el texto tiene y hay que buscarlo– o bien como una propiedad que es extraída del texto a partir de inferencias del analista –el texto es la fuente que permite las inferencias–. La segunda interpretación no puede aceptar que el análisis de contenido sea "una técnica de investigación para una objetiva, sistemática, y cuantitativa descripción del contenido manifiesto de la comunicación", como lo definía clásicamente Berelson en 1952 (Krippendorff 1990, 19). Los análisis de contenido no necesitan restringirse a lo cuantitativo, ni pueden considerarse objetivos por la mera remisión a las fuentes, si es que se acepta que, por el contrario, el contenido es *construido* por el investigador a partir de las fuentes.

De esa manera surge el análisis de contenido tanto cuantitativo como cualitativo que hoy es corriente, con definiciones más inclusivas como "el análisis de contenido es una técnica de investigación que produce inferencias replicables y válidas a partir de los textos…" (Krippendorff 1990, 19) o también la del profesor de la Universidad de Harvard, Robert Weber: "el análisis de contenido es un método de investigación que utiliza un conjunto de procedimientos para efectuar inferencias válidas partiendo del texto" (2012, 9). Las técnicas mismas pueden ser tanto cuantitativas como cualitativas. Para las cualitativas, se tienen desarrollos que permiten su tratamiento matemático con procedimientos y conceptos de la teoría de la información (Krippendorff 2012, Yaglom y Yaglom 1983, Li 2010, Pierce 1980, Taylor y Wallace 2007). La técnica del *análisis de contenido* en esta tesis se inscribe dentro de la denotación de cualquiera de las dos últimas definiciones, por lo que en algunos capítulos requiere de un especial énfasis sobre las cuestiones relativas a la confiabilidad de variables cualitativas. Cuando las inferencias producidas son de naturaleza estadística, las cuestiones propias de transferencia del análisis muestral al espacio poblacional son las corrientes de la disciplina, involucrando muestreos aleatorios y produciendo eventos de probabilidad muy próxima a 1, con sus correspondientes intervalos de confianza, con rutinas de procedimientos documentadas por textos corrientes del área (Dress 2013, Papoulis 1990, Veysseyre 2006, Devore y Berk 2012, Wilcox 2010), (Adams, y otros 2004, Balakrishnan y Nevzorov 2003, Meyer 1992, Freund y Wilson 2013) con el complemento de técnicas especializadas para el cruzamiento de tablas de categorías nominales (Fiemberg 2007).

2. Materiales

Los materiales utilizados en esta tesis son, fundamentalmente, libros de texto, o más propiamente dicho, son los textos de los libros de texto, ya que solo ocasionalmente se hacer una referencia lateral al objeto mismo –el libro– que sirve de soporte al texto. Los textos de los libros de texto están provistos de una heterogeneidad que proviene de las decisiones tomadas por sus diferentes autores, y a la vez reconocen una homogeneidad provista por la común disciplina que los agrupa.

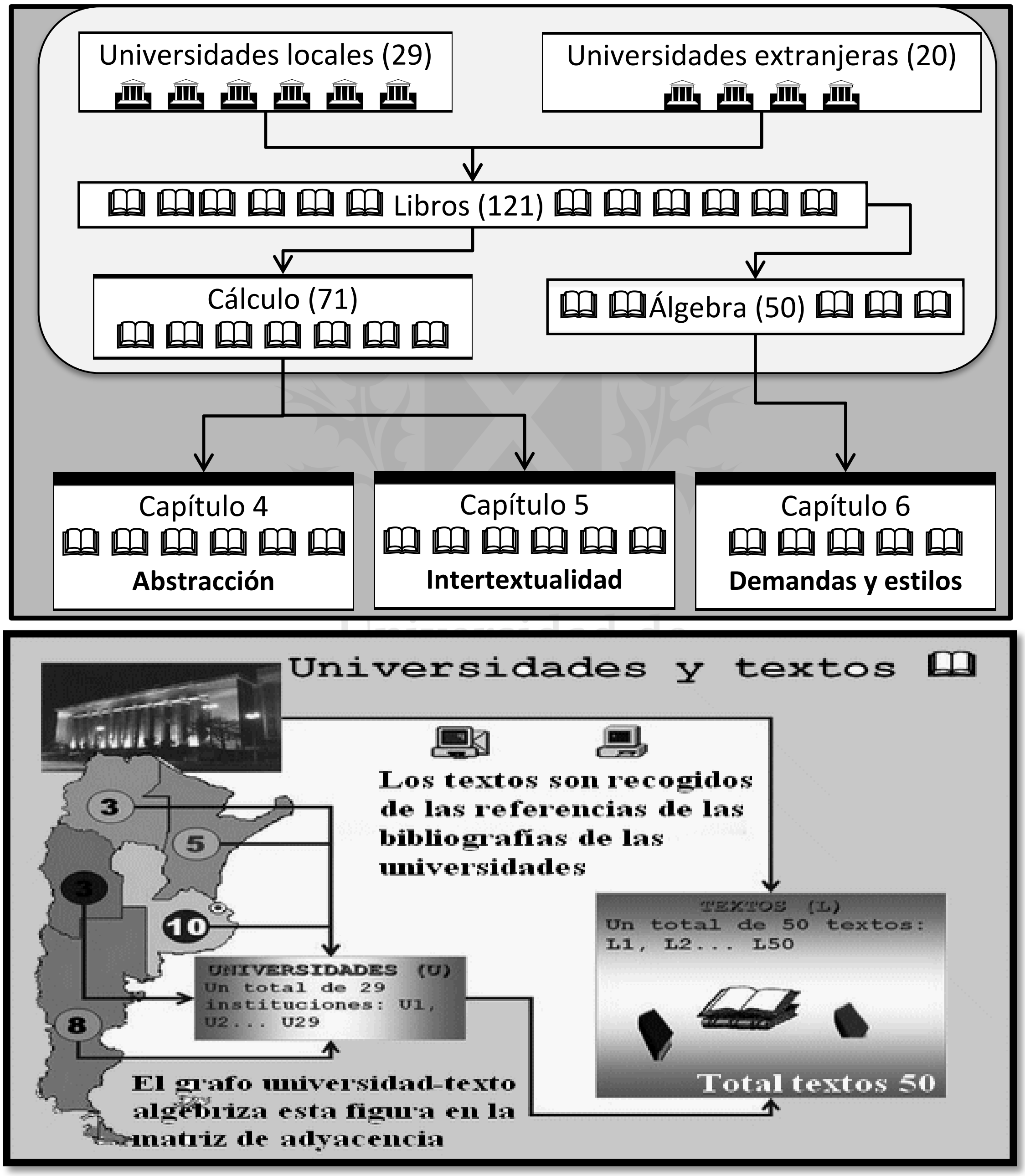
Los 121 textos utilizados como materiales en esta investigación pueden agruparse en dos grandes clases: textos de *álgebra lineal* y textos de *cálculo vectorial*. El conjunto de textos de la primera clase tiene 50 libros, mientras que la segunda consta de 71. Cualquiera de ellos, independientemente de la disciplina, es un libro de texto que se encuentra incluido en la bibliografía de alguna universidad argentina o extranjera, lo que lo convierte, según la terminología de TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) en un objeto-bisagra entre el *curriculum* pretendido y el alcanzado. La investigación recoge la información de todas las universidades de la Argentina que ofrecen carreras de ingeniería y que han publicado la bibliografía recomendada para las asignaturas que comprenden las áreas de estudio. En lo que respecta a las universidades del exterior, se incluyen entre las primeras 10 universidades a nivel mundial y las primeras 10 universidades de Europa occidental, a todas aquellas que hayan cumplido el requisito de presentar la información bibliográfica en la red, respecto a las mismas áreas.

Se ha adoptado de entre todos los ordenamientos de esas instituciones, uno cuyos principios resulten compatibles con el tema de esta tesis: los llamados genéricamente *criterios bibliométricos objetivos*. Los organismos elegidos para proporcionarlos, el laboratorio de *Cibermetría del Consejo Superior de Investigaciones Científicas*, CSIC, España y el *QS World University Rankings*[6] son reconocidos por la transparencia de metodologías explicitadas en sus sitios, una de cuyas piezas informativas se reproduce en el apartado 3.2 del Anexo, que también incluye el ranking resultante. De esta manera resulta que las universidades locales suministran un repositorio de 83 textos, de los cuales 50 pertenecen al área del álgebra lineal y los restantes 33 al del cálculo vectorial o la geometría diferencial. El nivel de detalle que indica cómo se distribuyen estas poblaciones de textos se encuentra ya desarrollado localmente de modo completo en cada uno de los capítulos.

[6] El sitio QS en http://www.topuniversities.com/university-rankings/world-university-rankings/2012/subject-rankings, la metodología del CSIC en http://www.webometrics.info/es/metodologia.

Esta visión de conjunto de los materiales muestra la población de libros fluyendo desde el conjunto de las universidades para luego ser direccionados por disciplinas y propósitos hacia cada capítulo de análisis, como muestra la Figura 1.

Figura 1. Un esquema global de la fuente y marcha de los materiales sobre los que se aplica el análisis de contenido para producir localmente cada uno de los capítulos 4, 5, 6 y (panel inferior) el esquema local del capítulo 6 con los textos de álgebra lineal



Fuente: elaboración propia

En el capítulo 4 se producen los resultados que permiten determinar la naturaleza de la abstracción a lo largo de los conceptos en los diversos textos; en el capítulo 5 se estudia la estabilidad de los conceptos ante el fenómeno de intertextualidad y en el capítulo 6 la estructura de demandas cognitivas y estilos de prosa en los textos de álgebra lineal.

3. Métodos

En la anterior Figura 1, el último nivel de flechas descendentes que desemboca en cada capítulo puede entenderse como representando los métodos que permiten obtener los datos sobre los que se realiza el análisis. El *análisis de contenido* es un invariante metodológico de esta tesis, pero adopta características peculiares en cada uno de los tres capítulos centrales – capítulos 4, 5, 6– por las particulares condiciones del contenido que abordan cada uno de ellos.

La pregunta que el análisis de contenido inevitablemente debe responder es la misma a través de los tres capítulos: ¿cómo asignar una gran cantidad de información recogida de los textos a una pequeña cantidad de categorías? Una cuestión previa todavía presente y que a grandes rasgos divide las técnicas cualitativas y cuantitativas se relaciona con las categorías mismas. Puede resultar que las categorías se hallen previamente establecidas con cierta nitidez y definidas operativamente por una construcción teórica bien establecida y probada, en cuyo caso el análisis procede verificando que las propiedades definitorias de la categoría se hallen o no presentes en el texto sobre el que esas propiedades se infieren. O bien puede resultar que el cuerpo teórico tenga definiciones más o menos borrosas de esas clases, en cuyo caso el trabajo consiste en una construcción mejor recortada pero ahora a través de la lectura misma. Ambas situaciones están presentes en este trabajo.

En el capítulo 4 (Abstracción), la teoría del AMT establece algunos rasgos de lo que debe entenderse como pensamiento abstracto en la matemática avanzada, indica el lugar donde con mayor probabilidad puede buscárselo en el discurso matemático y postula algunas consecuencias. Pero solo el progreso a través de los textos permite finalmente determinar qué forma específica toman esas nociones metamatemáticas cuando se encarnan en conceptos matemáticos *escritos*, presentados y definidos por el autor de un texto.

En el capítulo 5 (Intertextualidad Matemática) y también en el capítulo 6 (Demandas y Estilos), la situación es otra. Las demandas cognitivas y los estilos de prosa tienen perfiles más nítidos en el cuerpo teórico, y el concepto matemático seleccionado para el análisis de la intertextualidad puede ser descompuesto en componentes intensionales cuyos valores posibles son finitos, lo que convierte el análisis de contenido en el relativamente simple proceso de juzgar si un dado trozo de texto permite su asignación a una u otra categoría. Compartiendo la misma naturaleza, la diferencia metodológica entre el capítulo 5 y el 6 es de grado: la imputación de textos a clases en el capítulo 6 deja más lugar a la subjetividad del analista, pues los indicadores implican presunciones sujetas a alguna holgura mayor que en el caso del capítulo 5.

Esa diferencia se manifiesta en lo metodológico. El capítulo 6 incorpora técnicas derivadas de la teoría estadística de la comunicación que permiten responder la pregunta: ¿asignarían distintos observadores del mismo modo los trozos de información a las celdas prestablecidas?, asignándole un valor de confiabilidad a la respuesta, para encuadrar el rango de incertidumbre que resulta del proceso de compresión de los datos en un sistema de categorías finitos (Gray 2011, Krippendorff 2012, Csiszár 2004, Hankerson, Harris y Johnson 2003, Khinchin 1957). La confiabilidad en los capítulos 4 y 5, en cambio, remite al problema clásico de asignar una probabilidad de que alguna afirmación obtenida en la muestra –supuesta aleatoriamente elegida– pueda ser extendida a la población, y cuál es el riesgo de asumir esa extrapolación.

La secuencia cronológica de la presentación de los tres capítulos responde a una necesidad lógica de la estructura de la prueba. El capítulo 4 se pregunta por la naturaleza de la abstracción universitaria, por sus grados y por su intensidad en los libros de texto. Como la abstracción tiene lugar una vez que los conceptos se presentan en los textos, el capítulo se obliga a recorrer conceptos (para lo que toma una muestra de conceptos) y textos (para lo que toma una muestra de textos) y efectúa un 'disparo' aleatorio de conceptos sobre el fondo de los textos. Las conclusiones obtenidas por este procedimiento son luego extendidas a los conceptos y textos no alcanzados por ese procedimiento aleatorio con las técnicas propias de la inferencia estadística. Si bien el análisis procede a través de un área disciplinar –el Cálculo Real– las proposiciones tienen una confiabilidad por lo menos igual cuando se las atribuye a las áreas del Cálculo en Variable Compleja y el Álgebra Lineal.

Una vez probadas que las notas esenciales de la abstracción pueden predicarse estadísticamente de *todos* los conceptos, en cualquiera de las áreas, el capítulo 5 puede legítimamente escoger *uno* para analizar su estabilidad ante la diversidad de presentaciones de la población de textos. Ahora se mantiene fijo el concepto y se recorren los textos, probando la inestabilidad ante el fenómeno de la intertextualidad. El análisis de contenido de la definición del concepto descompuesto en sus componentes intensionales muestra que la inestabilidad es tanto de objeto (el objeto definido no es el mismo) como lógica (la sustitución de conceptos en una proposición fija altera su valor de verdad).

Finalmente, el último capítulo de la serie –el 6– está habilitado para analizar las demandas cognitivas y los estilos de prosa como atributos que pueden extraerse de los textos y ya no de los conceptos mismos. El sujeto del análisis de contenido de las demandas lo constituyen las actividades de los textos, de las que se extraen sus componentes cognitivas; en cambio, para los estilos, el análisis descansa sobre la organización de los segmentos diferenciados funcionalmente. La muestra de textos ya no es aleatoria sino intencional, seleccionada mediante filtros que permiten una representatividad bivariable tanto en los estilos de prosa como en el nivel de popularidad de los textos. Sobre la muestra, se efectúa el análisis de actividades (un total de 342 actividades), que es la totalidad de las que pertenecen al tema de espacios euclídeos.

Señaladas las diferencias que los propósitos y los materiales exigen en la aplicación del análisis de contenido a través de los tres capítulos nucleares de este trabajo, se muestra globalmente la impronta de semejanza que les imprime el compartir una misma metodología.

En el análisis de contenido las propiedades que son extraídas del texto no se hallan en los textos en estado puro; no están listas y terminadas para ser posteriormente analizadas, sino que es necesario convertir el material encontrado, a través de una inferencia, en esos contenidos que van a ser sujeto de análisis. Atravesando los tres capítulos se pretende, en consecuencia, el cumplimiento de la recomendación de explicitar la cadena completa de esos procesos. En todos se plantea una detallada marcha de las operaciones que llevan de las poblaciones a las muestras, y una reproducción fiel –llegado el caso, fotográfica– del material sobre el que se efectúan las inferencias, el contenido de estas inferencias y la asignación de significado a esos contenidos.

El cumplimiento de estas condiciones se manifiesta mediante la reproducción del trozo de texto original, sin modificación alguna que no resulte de las necesidades de edición. Cuando, sin embargo, el autor de esta tesis ha introducido alguna nota o énfasis o modificado una secuencia, esa intervención queda registrada en la misma figura reproducida. La Figura 2 da cuenta del tipo de señalamiento utilizado en el capítulo 4.

Figura 2. Un ejemplo de intervención del autor de la tesis en el fragmento del texto *Cálculo com Geometria Analítica* (Simmons 2011, 107). La tipografía enfatizada no es del original

Como sabemos, o processo de achar a derivada de uma função chama-se *derivação* (ou *diferenciação*). No Capítulo 2, esse processo foi baseado diretamente na definição de derivada. **Vimos que esse enfoque é bastante demorado e sem graça.**

Fuente: elaboración propia del texto *Cálculo com Geometria Analítica* (Simmons 2011, 107)

Cuando el análisis se dirige directamente al objeto definido por un texto sin que intervenga el modo de presentarlo, como es el caso del capítulo 5, las definiciones se han reproducido íntegramente, pero no fotográficamente, de modo que todas han quedado escritas en una tipografía uniforme y agrupadas en una matriz de definiciones, aunque preservando el idioma original para aquellos casos en que no se cuenta con una traducción profesional al castellano. En esas ocasiones, los análisis son explicitados con traducciones del autor de esta tesis (en el apartado 3.3. del Anexo se muestra el original que se ha reproducido aquí sin su tipografía).

Figura 3. Transcripción de una definición original del texto *Analysis I* (Zorich 2004a, 395) y la traducción no profesional de autor de esta tesis[7]

T*C26 395	Ein Weg in $\mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $t \to (x(t),y(t),z(t))$ eines Intervalls der reellen Geraden auf $\mathbb{R}^3$ die durch die Funktionen x(t), y(t) und z(t), die auf dem Intervall stetig sind, definiert ist. [Un camino en $\mathbb{R}^3$ es una función $t \to (x(t),y(t),z(t))$ de un intervalo de la recta real en $\mathbb{R}^3$ definido por las funciones continuas x(t),y(t) y z(t)) en el intervalo]			
	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C26	Intervalo, sin especificar	La aplicación es el *camino* y es continua	Euclídeo R^3	Sin nombre

Fuente: esta tesis, capítulo 5

El trozo de texto de la parte superior de la Figura 3 es asignado a un vector de intensiones que se muestra en la parte inferior, que carga los valores que toman las cuatro componentes intensionales $I = (I_1, I_2, I_3, I_4)$ de la definición. La función del análisis de contenido es, justamente, permitir las inferencias legítimas que permiten transformar el párrafo en una cuádrupla de valores que lo caracterizan en el espacio de las intensiones.

[7] La celda izquierda contiene el código de identificación del texto y el número de página del que procede la cita. La parte inferior de la figura muestra el calculado vector de intensiones.

En el capítulo 6, una vez identificados los estilos de pertenencia de cada texto, el cálculo de asignaciones de actividades a las componentes de demandas cognitivas se hace por medio de un vector de demandas con ocho componentes, explicitándose la asignación con la previa transcripción de la fuente, en una secuencia que ilustra la Figura 4.

Figura 4. Reproducción del texto de Álgebra II (Rojo 1995), con el correspondiente vector de demandas calculado con la grilla de lecturas construida en el capítulo 6

7-37. Sea $(V, +, R, .)$ un espacio vectorial con producto interior.
Demostrar

1. $\|x - y\| \geqslant \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$
2. $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 \Rightarrow x \perp y$
3. $\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$
4. $x \perp y \Leftrightarrow \|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|\,,\ \forall\, \alpha \in R$

Ejercicio 7.37 reproducido del texto de Armando Rojo identificado como T4 en el capítulo 6 de esta tesis

Debajo, se observa el vector de demandas calculado

TN	Identificación	PN	EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
T4	7.37	258	270	0	1	0	1	1	1	1	1

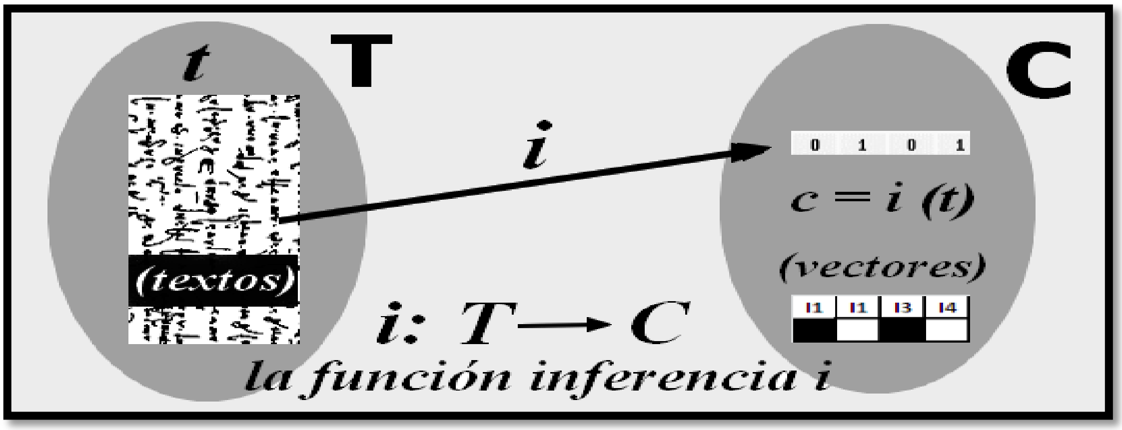
Fuente: esta tesis, capítulo 6

Lo que en la figura se denomina el cálculo del vector de demandas es, en términos más precisos y adecuados a esta sección, el análisis de contenido del segmento de texto reproducido. Las inferencias legítimas que permiten pasar de un trozo de texto a un único vector de ocho componentes en el producto cartesiano A^8, siendo $A \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1\}$ son efectuadas mediante una grilla de demandas que establecen las definiciones operativas de las ocho dimensiones con sus valores correspondientes (en 3. 4 del Anexo se transcriben las inferencias para este caso). Se construyen un total de 342 vectores de demanda que quedan integrados en la matriz de demandas que luego puede ser manipulada algebraicamente.

Puede unificarse el aspecto metodológico en común introduciendo una notación simbólica que resume el proceso: si se llama *i* a la función de inferencia que efectúa el trabajo del análisis de contenido, y *t* al segmento de texto sobre el que se aplica esa función, y ***c*** al vector de contenidos obtenidos legítimamente obtenido, lo que comparten los análisis de los capítulos es el esquema $\boldsymbol{c} = i\,(t)$, con $t \in$ T, llamando T al conjunto de textos que constituye la población de estudio. La función de inferencia *i* entonces transforma el texto *t* en un vector de informaciones ***c*** en un espacio de contenidos C, esto es $\boldsymbol{c} \in$ C.

La Figura 5 resume el procedimiento común en el lenguaje funcional; las recomendaciones de la bibliografía del análisis de contenido pueden en este lenguaje condensarse diciendo que debe procurarse dejar lo más explícitamente posible no solo los textos *t* y los valores asignados ***c***, sino también, y de manera especial, la función *i*. Esta tesis ha seguido esas recomendaciones en cada uno de los tres capítulos donde se ha aplicado el análisis de contenido. El apilamiento de los vectores ***c*** origina una matriz que carga los valores a analizar: el capítulo 5 la llama *matriz de intensiones*, el capítulo 6 la denomina *matriz de demanda*; ambas son luego algebraicamente manipuladas.

Figura 5. La función inferencia del análisis de contenido: el texto $t \in$ T se transforma a través de la función *i* en el vector $\boldsymbol{c} = i\ (t) \in$ C. T es el conjunto de textos y C el conjunto de contenidos

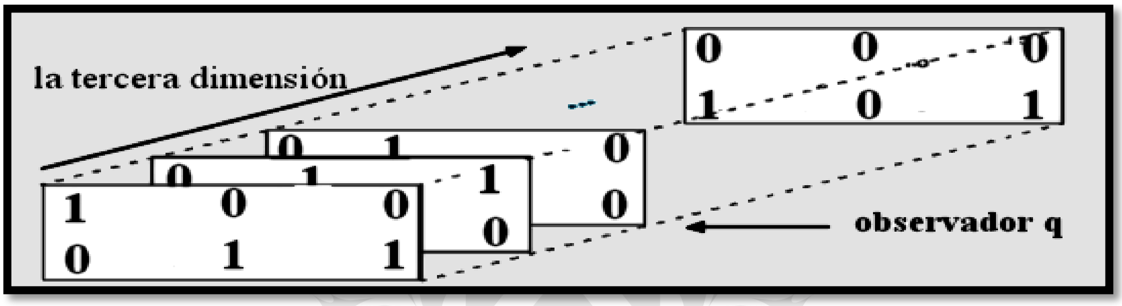


Fuente: elaboración propia

Una cuestión particularmente crítica del análisis de contenido se presenta en el capítulo 6, donde la función *i* es aplica sobre 342 fragmentos de texto t_k para obtener otros tantos vectores $\boldsymbol{c}_k = i\ (t_k)$, con el índice *k* tomando todos los valores naturales entre 1 y 342. Como a la vez, cada vector $\boldsymbol{c}_k$ consta de ocho componentes, la matriz de demandas tiene 342 filas por 8 columnas, esto es que la función *i* ha cumplido el trabajo de asignar valores a poco menos de tres mil celdas para alcanzar la matriz de demandas cognitivas, cuya fila k, columna p carga el valor asignado a la actividad marcada con *k* en la componente de demanda etiquetada con p. Cada fila puede ser llenada de 256 formas diferentes ($2^8 = 256$), y la matriz misma puede ser llenada de 2^{2736} formas diferentes. Estos números traen inevitablemente la necesidad de considerar la subjetividad del codificador: por preciso que quisiera pensarse el instrumento de medición de las demandas construido en el capítulo 6, la probabilidad de que un codificador –por experto que fuese– no cometa un error es casi nula.

Al enfrentar este problema, la matriz de demandas ya no es bidimensional, sino que se introduce una tercera dimensión quedando una matriz 3D; la tercera dimensión permite identificar al observador. La identificación de la celda ahora requiere de tres subíndices: el índice k que indica la fila, el índice p que indica la columna, y un índice *q* que indica la profundidad. La celda de fila *k*, columna *p*, y profundidad q carga el valor asignado a la actividad k en la demanda *p* por el observador etiquetado con *q*, y se designa en la Figura 6 con D_{kpq}.

Figura 6. Un recorte de la matriz de demandas 3D, D_{kpq} muestra 'copias' de la matriz de demandas: una por cada observador q. La esquina superior derecha muestra un mejor acuerdo entre los observadores que el de la esquina inferior derecha, que dos juzgan como '0' y dos '1'



Fuente: elaboración propia

Considerando que las 'copias' de las matrices de demandas originadas por este procedimiento de múltiples observadores no serán iguales, debe asignarse una medida que identifique el grado de acuerdo, y que no puede ser simplemente el porcentaje de observadores que juzga de la misma manera un trozo de texto; se necesita, por el contrario, una medida del grado de acuerdo en tanto que supere el que podría obtenerse por mero azar de observadores que asignaran aleatoriamente los valores a las componentes de los vectores de demanda.

En esta tesis la matriz 3D de demandas se constituye mediante el recurso de asignar a tres observadores externos (además del autor de esta tesis) la asignación de valores de demanda a una muestra aleatoria de las actividades y calculando los correspondientes coeficientes de acuerdo con las nociones derivadas de la entropía de la información. Esto permite construir las matrices de confiabilidad, una para cada dimensión de demanda. En la representación de la Figura 6, puede verse una matriz de confiabilidad como una sección en el objeto 3D obtenida a lo largo de una componente de demanda mantenida como fija, dejando variar las actividades y los observadores; la Figura 7 muestra un fragmento de una de las ocho matrices de confiabilidad de demandas cognitivas (la matriz completa se observa en el apartado 3. 5 del Anexo).

Figura 7. Fragmento de una matriz de confiabilidad con la codificación de los textos, la identificación local y global de sus actividades (filas) y los observadores (columnas)

Confiabilidad kappa = 0.79

TN	Identif.	PN	EN	O0	O1	O2	O3	0	1
T1	§III.28	317	5	1	1	1	1	0	4
T1	§III.46	319	23	1	1	1	1	0	4
T2	§8.1.17	274	47	1	1	0	1	1	3
T2	§8.4.11	307	87	0	0	0	0	4	0
T2	§8.52	313	93	1	1	1	1	0	4
T2	§8.56	314	97	0	0	0	0	4	0
T2	§8.58	314	99	0	0	0	0	4	0
T3	§6.125	383	134	1	1	1	0	1	3
T3	§6.126	383	135	1	1	1	1	0	4
T3	§6.23	392	149	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.7	392	153	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.11	392	157	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.12	392	158	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.17	392	163	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.19	392	165	1	0	1	1	1	3

Referencias	
TN:	Identificación del texto
Id:	Identificación del ejercicio
PN:	Número de página
EN:	Código de ejercicio
O0:	Valor asignado observador 0
O1:	Valor asignado observador 1
O2:	Valor asignado observador 2
O3:	Valor asignado observador 3
0	Cantidad coincidente en 0
1	Cantidad coincidente en 1

El coeficiente kappa:

$$\kappa = \frac{Pm - Pe}{1 - Pe}$$

Fuente: elaboración propia

En el capítulo 6 se opera con tantas matrices de confiabilidad como dimensiones del análisis de contenido se presentan, para evitar que coeficientes de confiabilidad elevados en una dimensión pudieran conducir, con su contribución al resultado global, a una confiabilidad aceptable aun con confiabilidad pobre localmente en alguna dimensión. La manipulación simultánea del álgebra necesaria para el cálculo de los coeficientes en arreglos tridimensionales se efectúa con una aplicación de cálculo numérico (en el apartado 3.6 del Anexo puede verse una escala de resultados para el coeficiente κ-Fleiss, una generalización para múltiples observadores del κ-Scott).

La confiabilidad de la función de inferencia *i* deja de ser crítica en los capítulos 4 y 5 por lo anteriormente apuntado: en el capítulo 4 los conceptos son construidas a partir de la evidencia recogida en los textos, de modo que lo que allí se denomina, por ejemplo, *procepto*, aunque delineado por el marco teórico del pensamiento matemático avanzado, de hecho es ejemplarmente relevado en los segmentos sujetos al análisis. En el capítulo 5, en cambio, las cuatro categorías cuyos valores se relevan en los textos, están definidas con nitidez y, por decirlo así, a escasa distancia del texto mismo, por lo que la función de interpretación para un conocedor de la disciplina es casi una rutina de lectura no sujeta a límites borrosos que pudieran requerir de una valoración subjetiva.

Una observación final respecto a la validez bidimensional. En los capítulos 4 y 5 la validez del *muestreo* se logra con muestras aleatorias, en el capítulo 6 la muestra es intencional para ser heterogéneamente representativa. La validez *semántica* (los significados asignados coinciden con los asignados por el autor del texto) se alcanza con la lectura disciplinar a cargo de entendidos en el área[8]. La *validez de inferencias* (las inferencias se llevan a cabo con un instrumento fijo) se alcanza aquí con el cumplimiento de transparentar los métodos por los que se efectúan las inferencias desde el texto a los contenidos, y las que proceden ya entre los contenidos obtenidos.

Los siguientes tres capítulos desarrollan ya los aspectos específicos, y cada uno cuenta con un apartado metodológico que detalla las cuestiones propias que esas temáticas reclaman a la dimensión metodológica. El capítulo 4 (abstracción) presenta el minucioso detalle de una elección aleatoria bidimensional (de conceptos y de textos), el capítulo 5 hace lo propio con la selección de los textos de utilización en el exterior del país, y el capítulo 6 muestra los filtros y criterios utilizados para seleccionar la muestra intencional.

[8] A la lectura del autor de esta tesis se le superpone, a los efectos del análisis, la lectura de tres observadores externos dotados de la misma herramienta que el autor –el instrumento de análisis– que sirve de grilla de lectura de categorías. Los tres lectores externos son profesores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires y se desempeñan en el Departamento de Matemática de la Facultad en las áreas de análisis matemático y álgebra, que comprenden las asignaturas que alojan los contenidos que son objeto de este análisis.

CAPÍTULO 4

ABSTRACCIÓN

1. Introducción

"Las concepciones de las que nos ocupamos y cuya conexión íntima estudiamos, son ellas mismas producto de un trabajo prolongado del pensamiento matemático y están muy alejadas de los pensamientos que son de uso corriente en la vida". La cita del eminente matemático Félix Klein (Le Lionnais (comp.) 1976, 19) alude a una de las dificultades propias del tipo de pensamiento matemático en niveles avanzados, cuya cristalización, a la que se arriba por largos procesos no siempre lógicos, se sitúa a una distancia considerable de los estímulos y especulaciones que la originaron.
La abstracción es considerada como un rasgo propio de las ciencias, y en particular de aquellas que formulan modelos en el lenguaje de los sistemas formales. Las áreas de formación básica de las carreras de ingeniería se ubican en los tramos iniciales del recorrido curricular y comprenden nociones fundamentales del Cálculo y del Álgebra Lineal. Sin embargo, la abstracción no irrumpe aquí por primera vez en la educación formal del alumno, sino que está presente desde la escuela primaria. Sin embargo, con el progreso de la formación, y a medida que se asciende en los niveles, la abstracción es vista como uno de los principales obstáculos y motivo de no pocos fracasos, habiendo llegado a tener muy mala reputación (Sfard 2008, 29, Mitchelmore y White 2007, 1) ¿Qué rasgos esenciales son propios de la abstracción en el nivel universitario? ¿Cuál es el criterio demarcatorio entre la abstracción propia de la matemática elemental, por un lado, y la que exige la matemática avanzada, por el otro? ¿La diferencia es de grado o de naturaleza? ¿Cómo se observa en los libros de texto universitario?

Se responden en este capítulo estas preguntas en el marco interpretativo de la corriente del Pensamiento Matemático Avanzado, relevando los distintos tipos de abstracción a través de doce conceptos de importancia central en una de las áreas básicas de la matemática en ingeniería: el Cálculo. Las nociones son: (1) función; (2) Límite de funciones y campos escalares; (3) Continuidad de funciones en espacios métricos; (4 Derivada de funciones escalares; (5) Primitivas e integrales; (6) Nociones elementales de topología en espacios n-dimensionales; (7) Derivadas parciales de campos escalares; (8) Extremos de funciones y campos escalares; (9) Curvas; (10) Superficies y Variedades; (11) Integrales múltiples; (12) Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales. El principal resultado revela el carácter diferencial de la abstracción en los niveles universitarios, que exige la construcción de conceptos no procedimentales junto con la restructuración del sistema de relaciones entre esos conceptos y su correspondiente resignificación. Al mismo tiempo, se reconoce el alto de grado de compresión que los conceptos de este nivel ejercen sobre la información, normalmente condensado en las definiciones. La evidencia empírica de estos aspectos conceptuales se recoge de los libros de texto incorporados al *curriculum* de Cálculo a través de las bibliografías. El salto cualitativo de la abstracción señala la singularidad del libro de texto de matemática universitaria y sus diferencias específicas con los de matemática elemental. Las investigaciones en el área de la alfabetización académica (Eisenberg 1991, Carlino 2004, 2009, 2007) postulan que los textos universitarios de cualquier disciplina tienen un carácter técnico tal que requieren de estrategias de lectura no enseñadas formalmente en los niveles preuniversitarios. Este capítulo aporta evidencia teórica y empírica de que esa necesidad es especialmente intensa en el área de la matemática universitaria, cuya naturaleza difiere no solo en grado, sino en naturaleza, de la matemática elemental.

1.1. Abstracción empírica

Abstracción es una palabra que ha sido cargada de múltiples significados –y sentidos– desde sus mismos orígenes; uno de ellos es caracterizado por lo que ha recibido la denominación de ‘abstracción empírica’, que se trata en este apartado, y que se diferencia de la ‘abstracción teórica’ que se trata en el siguiente.

En el lenguaje común, posiblemente el sentido más familiar de abstracción no difiere mayormente del ejemplificado con extrema sencillez por Kant en un pasaje de su Lógica: “Por ejemplo veo un abeto, un sauce, y un tilo […] si reflexiono únicamente en lo que tienen de común entre sí […] y hago abstracción de su tamaño, de su figura, etc., obtengo el concepto de árbol” (2010, 131). Si bien el proceso parece describir con naturalidad el modo en que se alcanza el concepto de árbol, Bertrand Russell advierte que no cabe esperar que tales adquisiciones se alcancen sin un considerable esfuerzo “Debe de haberse tardado largo tiempo en descubrir que una pareja de faisanes y un par de días eran dos ejemplos del número 2; el grado de abstracción que ello implica no es fácil de adquirir” (1988, 12). En este sentido, nada hay de esencialmente diferente entre el concepto simbolizado por “2” y el que se representa con el término “árbol”, y uno y otro podría entonces quedar condensado en una definición, que retendría lo que ha quedado de ese proceso de abstracción. La definición de árbol como “Planta perenne, de tronco leñoso y elevado, que se ramifica a cierta altura del suelo” convierte a los tilos y abetos kantianos en meros ejemplos, como los días y faisanes de Russell en casos de un concepto. En el sentido indicado, la abstracción no es propia de la matemática en particular, ni siquiera de la ciencia en general sino que podría considerarse el criterio demarcatorio de la humanidad, según la conocida declaración del matemático Le Lionnais: “La aptitud para la *abstracción* nos parece ser la que marca más nítidamente la diferencia entre el hombre y sus vecinos en la escala animal” (1976, 15). Sin alterar la similitud expuesta, se señala una diferencia que está relacionada con la nitidez de las definiciones: mientras que la definición de árbol podría ser insuficiente para separarlos de otras plantas muy próximas, la definición que finalmente se adopte del número 2 no debe permitir objetos cuya pertenencia al concepto no sea claramente separable. Existe otra diferencia fundamental: en la concepción kantiana, todo el conocimiento matemático construye (*a priori)* sus conceptos: “la matemática nos da un espléndido ejemplo de cuán lejos se puede llegar con un conocimiento *a priori* independiente de la experiencia (Kant 2000, 129)”

Los mismos sustantivos del lenguaje común, con la posible excepción de los nombres propios, son en sí abstracciones que actúan como etiquetas de clases de objetos antes que de individuos, abstracciones a las que se han arribado tras diversas operaciones sobre los objetos percibidos: “nombres como silla, copa o esponja no se refieren a objetos específicos sino una clase de objetos” (Mason y Johnston-Wilder 2004, 132). Puede entonces decirse que el lenguaje “natural” es el principal vehículo de la abstracción.

Un mecanismo postulado para este tipo de abstracción se relaciona con la persistencia de las semejanzas por sobre las diferencias: las semejanzas, en sus variadas ocurrencias con los objetos de la misma clase se presentan con mayor frecuencia que las diferencias, que al variar de un caso a otro no logran una impresión permanente. Esta prioridad de los casos sobre las definiciones es escenificada mediante la acción de un padre que le enseña a un niño lo que es un gato: no se supone que se recurra a una definición como “relativamente pequeño mamífero carnívoro con uñas retráctiles que emite maullidos [sino más bien a] mostrarle una gran cantidad de gatos diciendo ‘gatito’ cada vez, hasta que adquiera la idea” (Boas 1981, 727). El autor de la cita, editor del *The American Mathematical Monthly*, manifiesta que muchos de los artículos especializados que son rechazados tratan al lector del mismo modo que el padre al niño que es ‘atacado’ con la definición de gato; el ataque consistiría en presentar una abstracción ya consolidada sin la oportunidad de contar con ejemplares de lo cuales pueda hacerse esa abstracción.

La idea básica de que la abstracción opera sobre un conjunto de objetos se halla ya en los orígenes del término. El verbo ‘abstraer’ y su correspondiente sustantivo ‘abstracción’ (αφαιρεω, αφαιρεσιζ) en el original griego designaba la acción –y también el efecto[9]– de extraer, separar algo de alguna cosa, significado que no varió en el latín tardío [*abstrahere*, *abstractionem* acusativo de *abstractio*, y *abstractus* participio pasivo de *abstrahere*: *abs* (desde) + *trahere* (sacar, arrastrar)], aunque se fue especializando para designar la operación –y su efecto– de poner mentalmente aparte una propiedad de una cosa para considerarla separadamente, o de varias cosas para considerarlas bajo esa misma propiedad común. Por ejemplo, se puede separar la noción de ‘círculo’ para considerarla aparte de cada uno de los objetos circulares, o también cabe considerar un miriápodo sin que haya animal alguno de mil patas. Los objetos matemáticos son, en esta visión aristotélica el resultado de separar mentalmente una nota esencial de una postulada realidad para generar un concepto que les es común a todos los miembros. (Aristóteles 1967a, 1967c, Moreau 1993).

En la concepción platónica el término es más difuso, lo abstraído no procede de la realidad sino que tiene más consistencia que la realidad misma: al mundo de la matemática solamente se accede por el pensamiento, punto de partida de la disciplina de apartarse del mundo sensible y mudable hasta alcanzar los objetos estables de la matemática. La experiencia puede ser la ocasión que permite acceder a esa realidad más profunda mediante un proceso de ascenso que no consiste en la reunión de rasgos comunes recogidos de un sustrato de percepciones (Ferrater Mora 2004a, Koyré 1996).

La abstracción kantiana, por otra parte, es presentada como uno de los tres momentos en la formación de conceptos a partir de las representaciones: (a) comparación [*komparation*], (b) reflexión [*reflexion*], (c) abstracción [*abstraktion*] o separación [*absonderung*]. La abstracción es siempre una separación de algo, por lo que “no tenemos que decir: abstraer algo (*abstrahere aliquid*) sino abstraer de algo (*abstrahere ab aliquo*)” (Kant, Lógica 2010, 131). Los tres momentos de Kant intentan dar cuenta de cómo se alcanza la abstracción a partir de los datos de la experiencia.

---

[9] La distinción entre la acción y el efecto, entre el verbo y el sustantivo se revelará como una distinción necesaria en los especialistas del Pensamiento Matemático Avanzado, como puede verse más adelante en Richard Skemp y en David Tall.

En el lenguaje de las clases, Skemp concibe la abstracción desarrollándose en dos momentos que exigen distinguir entre la abstracción como acción y la abstracción como efecto de esa acción (efecto que llama 'concepto'). "La abstracción es una actividad mediante la cual advertimos semejanzas… en nuestras experiencias. Clasificar significa agrupar nuestras experiencias sobre la base de esas semejanzas" […] "para distinguir de la abstracción como una actividad y la abstracción como el producto resultante… daremos a este último el nombre de concepto" (Mitchelmore y White, 2007, 3).

Se ha propuesto llamar a la abstracción así entendida como "abstracción empírica", en tanto se encuentra "basada en la experiencia" (Mitchelmore y White 2007, 3). Es sabido que en las concepciones que asumen la experiencia como fuente del conocimiento abstracto, se reconocen diferencias en la asignación del peso concedido a la intervención del sujeto para organizar esas percepciones. La abstracción empírica presupone dos cosas: por un lado, la existencia de objetos que se dan en una realidad con multiplicidad innumerable que es el material de base de la abstracción; por el otro, la capacidad del sujeto de seleccionar de esta infinita variedad de existencias particulares algunos rasgos que son comunes a ciertos grupos de ella. En la abstracción empírica "El concepto abstracto captura lo que hay de esencial en las cosas y deja todo la particular de lado, en él no hay mezcla alguna de elementos disímiles" (Peláez Cedrés 2008, 108). Tres problemas, dos de carácter práctico y uno teórico, pueden anotarse al momento de generar acciones que sean consecuentes con esta concepción de la abstracción. El primero proviene del volumen de recursos demandados para cualquier implementación consistente; el segundo, deriva de la magnitud y variedad de la brecha entre la abstracción pretendida curricularmente y la alcanzada por los alumnos o lectores en los niveles previos. El tercero, apunta a la diferencia de naturaleza entre el discurso matemático y el discurso de la educación.

La primera cuestión parte de reconocer que si los conceptos matemáticos se derivan de características comunes seleccionadas de un conjunto de casos, lo que debiera hacerse es permitir que los alumnos tengan ese material desde el cual 'levantar' la abstracción que se pretende. Si, en cambio, se les presenta la abstracción ya condensada en una definición, los conceptos resultarán pobremente comprendidos, fácilmente olvidados y difícilmente aplicables. La recomendación, desde esta perspectiva, alienta la presentación de una variedad de casos en un contexto relevante que conceda a los alumnos la posibilidad de reconocer semejanzas en esa diversidad de contextos, objetivarlas en un concepto y presentar nuevas situaciones donde la aplicación del concepto permita resolver problemas de una manera eficiente. Las investigaciones de experiencias en clase de este sistema, en matemática elemental "son prometedoras, pero revelan grandes inconvenientes de implementación" (Mitchelmore y White, Abstraction in Mathematics Learning 2007, 4). Trasladado a los libros de texto de la matemática avanzada, el autor tendría que considerar posponer la definición del concepto hasta haber presentado diversas aproximaciones a la abstracción que se pretende introducir: los problemas de implementación de un texto de estas características se vinculan de manera evidente con la extensión requerida para lograrlo, sin certezas de que el lector siga allí cuando finalmente llega la definición. Puede pensarse, por ejemplo, en cómo lograrlo con una de las nociones que se tratan en este capítulo, la de derivada de una función escalar; suponiendo que no haya una imposibilidad radical, surgen problemas prácticos: ¿cuántos contextos se precisarían hasta que un alumno pudiese construir esa noción entre los pliegues de la información que se le presenta? ¿Los tiempos curriculares son compatibles con estas estrategias de enseñanza?[10]

La segunda cuestión se puede expresar en términos de horizontes de abstracción. Si abstraer es 'abstraer de algo', la distancia entre ese 'algo' y el concepto abstraído puede referirse al sujeto que efectúa la operación, al estudiante al que se le reclama esa habilidad, y entonces se entiende que esa distancia sea percibida como diferente por distintos individuos, lo que da lugar a la noción de *horizonte privado* que se distingue del *horizonte absoluto*, que sólo contempla qué puede saber el hombre en tanto hombre en general. La distinción aquí esencial es que, mientras el horizonte absoluto indica la frontera de aquello que podría ser alcanzado por el saber humano, el horizonte privado se ubica en un lugar que es propio de cada individuo y marca los confines que en un dado individuo traza acerca de lo que necesita saber respecto a sus fines particulares. En términos curriculares, las materias básicas de matemática en las carreras de ingeniería fijan lo que podría llamarse un horizonte absoluto –un *curriculum* pretendido– constituido por aquellos conocimientos que se supone debe ser alcanzados por los alumnos; se trata del conocimiento postulado por una comunidad académica. Los estudiantes, dotados de sus propios intereses y capacidades se introducen en la universidad con un horizonte privado que puede quedar muy distanciado del absoluto. La distancia entre ambos horizontes es entonces relativa al conocimiento convenido por

[10] Uno cuestión ya planteada por David Perkins (2003) al defender la enseñanza directa frente a la enseñanza socrática.

la comunidad académica; el tratamiento de esta relatividad cultural de la abstracción exigiría del paradigma epistemológico. De que esa distancia puede ser considerable deja constancia el teórico del Pensamiento Matemático Avanzado, David Tall: “los estudiantes de matemática avanzada se quejan con frecuencia de que los temas son demasiado abstractos” (1991b, 11).

Finalmente, el tercer problema, proviene de que la abstracción matemática se cristaliza en un discurso que Bernstein (2003c) denomina jerárquico, horizontal, y de gramática fuerte. La jerarquía se refiere a su estructura de un progresivo distanciamiento del lenguaje y conceptos cotidianos. La horizontalidad, la capacidad de incorporar al núcleo original líneas paralelas de conocimientos en alguna medida inconmensurables. Bernstein pone como ejemplos de discursos jerárquicos y horizontales el de la matemática y el de la educación, pero la diferencia entre uno y otro resultaría de la fortaleza de la gramática del discurso matemático. Una gramática, como la de la matemática es fuerte, en la medida en que es capaz de generar descripciones carentes de ambigüedad. El discurso de la educación, del que el texto de Bernstein al igual que este párrafo es un ejemplo, no alcanza un nivel de abstracción congruente con el discurso matemático, cuestionando su legitimidad, al tratarse de un metalenguaje menos preciso que el lenguaje-objeto al que se refiere (Lerman 2005).

1.2. Abstracción teórica

Una de las contribuciones que ha tenido mayor impacto en la caracterización de la abstracción en las ciencias, y en particular de las ciencias matemáticas, proviene de Ernst Cassirer y está contenida en dos textos clásicos publicados en la primera mitad del siglo XX (Cassirer 1953, 1950). Cassirer comienza por cuestionar la abstracción empírica presentada en el apartado anterior, que entiende ligada a la concepción aristotélica de sustancia. En efecto, dada una colección cualquiera de objetos, lo que de ellos se puede seleccionar como propiedades comunes es prácticamente innumerable, y por lo tanto no está garantizada la posibilidad de escoger aquellas propiedades –y solamente aquellas– que caracterizan y determinan la estructura completa de los individuos que componen esa colección. La garantía de lograrlo provendría solamente de la concepción aristotélica del concepto como sustancia de las cosas, lo que Cassirer denomina el concepto empírico, o *concepto-cosa*. En la abstracción empírica, los conceptos matemáticos son situados en misma clase de los conceptos empíricos, de modo que no cabría distinguir entre la naturaleza del concepto de árbol, o de gato, obtenido por la selección de propiedades comunes a distintos ejemplares, y el concepto de cuadrilátero obtenido por selección de los rasgos comunes a rectángulos, cuadrados, rombos, trapecios… "los conceptos de la ciencia exacta matemática no se hallan en el mismo nivel que los de las ciencias descriptivas, que solo tratan de una superficial clasificación de objetos dados" (Cassirer 1953, 5). La inadecuación de la perspectiva de la abstracción empírica se pone de manifiesto en conceptos como derivada funcional, convergencia de series, para los que no hay una manera evidente de imaginarlos como una selección de propiedades comunes a una colección de objetos: "los conceptos de punto, o de línea, o de superficie, no pueden ser obtenidos como una parte de cuerpos físicos presentes y separados de ellos por simple 'abstracción' [empírica]" (12). Antes que la neutralidad de la abstracción empírica, que deja intactos los objetos sobre los que abstrae, la abstracción matemática responde a otra naturaleza, ya que "surgen a través de una definición genética estableciendo una conexión *constructiva*, a diferencia de los conceptos empíricos que pretenden meramente copiar ciertas característica de un conjunto dado" (12, las bastardillas pertenecen al original). El punto aquí esencial es que los conceptos matemáticos establecidos por las definiciones genéticas no se reducen a delimitar propiedades de objetos dados, sino que crean nuevas realidades con las que, a su vez, es posible operar. La abstracción empírica podría aceptarse como una conjetura acerca del surgimiento del *concepto-cosa*, pero no alcanza para dar cuenta de aquellos conceptos matemáticos que Cassirer denomina "*concepto-relación*"[11].

Es esta noción del concepto-relación, o para decirlo en otros términos, de la naturaleza funcional (en el sentido matemático del término función), el cambio de perspectiva que, por así decirlo, descarga ahora el peso de la generación del concepto no ya en la serie de cosas *dadas* de las que se extrae una propiedad común, como sucede en la abstracción empírica, sino que se piensa que el concepto es más bien una regla que constituye, eventualmente, la conexión entre objetos. Los objetos, ahora, no son sino lo que es instituido por la regla que los define, dando "una *regla* universal para la conexión de los particulares mismos" (Cassirer 1953, 20).

Lo que la literatura actual entiende por abstracción teórica se desarrolla en una línea que acepta la crítica de Cassirer a la pretensión de la abstracción empírica: "en

---

[11] La perspectiva de la abstracción empírica tampoco alcanzaría a explicar de qué manera podría llegarse a un concepto mediante una abstracción lograda desde una clase unitaria, esto es a partir de un solo caso, lo que ha sido demostrado no solo como potencialmente posible sino de modo concreto por David Hilbert: "la generalización con frecuencia se obtiene de la contemplación de un solo ejemplo" (Mason y Johnston-Wilder 2004, 133).

esencia, la abstracción teórica consiste en la creación de conceptos para ajustar en una teoría" (Mitchelmore y White 2007, 4). Si la abstracción empírica puede dar cuenta de lo que Vygotsky denomina los 'conceptos cotidianos o empíricos', no alcanza para explicar los que el mismo psicólogo llama 'conceptos científicos'. Una característica esencial del concepto científico, y que lo equipara con el concepto-relación, es su pertenencia a una estructura de relaciones en las que los objetos solo adquieren sus significados en tanto verifican esas relaciones; el concepto teórico, en oposición al empírico, no encuentra una semejanza entre cosas de una colección dada, sino que establece una conexión entre cosas que podrían resultar muy disímiles, siendo esa conexión la que informa en qué consiste el concepto. En ocasiones, también se utiliza el lenguaje de 'concepto elemental' y 'concepto teórico' (sin olvidar que ambos son teóricos) introducido por Davydov, que insiste en la diferencia cualitativa de la abstracción que concibe uno y otro: "El conocimiento científico no es una simple extensión, intensificación y expansión de la experiencia cotidiana de la gente. Requiere de una particular forma de abstraer, analizar y generalizar […] después de la abstracción teórica un objeto es mentalmente remplazado por otro" (Davydov 1990, citado por Mitchelmore y White 2007, 4).

Cualquiera que sea el tipo de abstracción que haya conducido a un concepto, cristalizado en una definición y nombrado con una palabra o símbolo, como por ejemplo 'derivada' o 'distancia', debe diferenciarse entre el significado objetivo, estático, del término y la dimensión dinámica del proceso por el que es adquirido. También Vygotsky señala con claridad que las abstracciones no se adquieren de modo completo, sino más bien por sucesivas aproximaciones. Tanto en el lenguaje cotidiano como en el científico, la incorporación de una abstracción al vocabulario es solo el inicio de un proceso que evoluciona a través de sucesivas transformaciones hasta estabilizarse en torno de un significado más o menos compartido por el resto de a comunidad hablante o científica a la que el término pertenece (1994, 2006). Los ajustes entre esos significados se harían operativos en distintos niveles de abstracción. Como el lenguaje en el nivel de abstracción teórica necesita una taquigrafía de símbolos eficientes para no multiplicar en demasía el volumen del discurso, se ha señalado que la profusión de símbolos operada en las últimas cuatro centurias ha podido inducir visiones sesgadas en las que "la matemática es vista más como un lenguaje que un campo de conocimiento" (Vergnaud 2011, 7). Esta concepción captaría una dificultad inherente de la abstracción teórica, pero ignoraría los otros aspectos que contribuyen a diferenciarla sustancialmente de la abstracción empírica, resultando así privilegiada la dimensión sintáctica de la matemática, con una pérdida relativa de las dimensiones pragmáticas y semióticas, formalismo que concibe la matemática como una ciencia vacía sin otro contenido sustancial que la consistencia de su propio discurso (Klimovsky y Boido 2005, 274).

1.3. Niveles de abstracción

La introducción de niveles de abstracción ha sido, con cierta frecuencia, una aproximación desde perspectivas constructivistas. Los niveles no deben ser entendidos para categorizar tipos de estudiantes, sino más bien el tipo de pensamiento que opera en un dado momento, de modo que un mismo sujeto podría tocar durante el aprendizaje de un dado tópico los distintos niveles establecidos. De esta manera resultan cinco niveles: (a) visualización, (b) análisis, (c) *abstracción*, (d) deducción informal, (e) deducción formal (Mason y Johnston-Wilder 2004, 59).

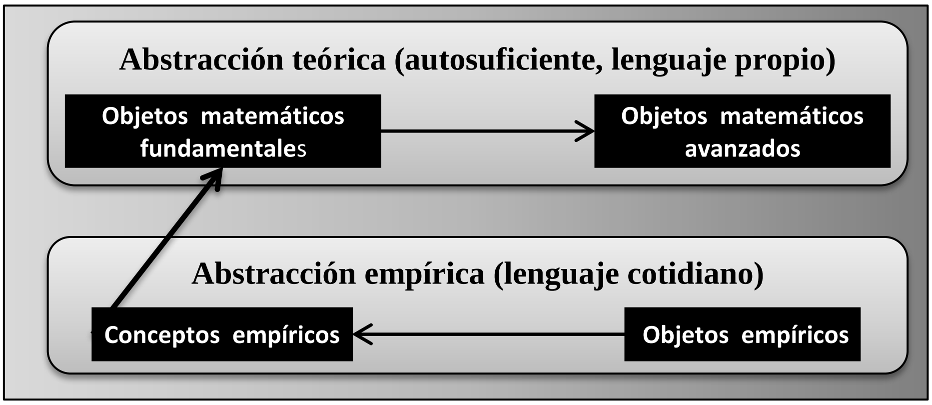
La visualización operaría a partir de formas geométricas simples mediante la mera identificación visual de algún tipo de semejanza sin alusión específica a las propiedades mismas que provocan la semejanza. En este nivel se vería que una colección de triángulos tiene algún 'aire de familia' sin precisar en qué consiste esa familiaridad. En el análisis se realiza una descripción en los términos del lenguaje utilizado en el nivel anterior de algunas partes necesarias propias al concepto. La *abstracción* utiliza en el nivel (c) el lenguaje para aislar propiedades necesarias a las distinciones establecidas en el nivel anterior. La deducción informal selecciona del listado de condiciones necesarias, las que son suficientes (no redundantes) para delimitar el concepto. En el último nivel, la deducción formal opera en ausencia de un modelo concreto y desprende conclusiones necesarias en un sistema de axiomas y definiciones.

Puede verse que en este esquema de niveles, la abstracción del tercer nivel no va más allá de una recolección de propiedades que se perciben, por sobre las otras, como constituyentes del concepto, mientras que en el siguiente nivel ya solo quedan aquellos rasgos cuyo contenido debe considerarse consustancial con el concepto. La abstracción empírica se sitúa, en este esquema, cubriendo hasta el cuarto nivel. Por otra parte, el quinto nivel, propio de las deducciones y definiciones en un sistema axiomático formal, se ubica en lo que ha dado en llamarse abstracción teórica en el apartado anterior. Pero la abstracción teórica, la abstracción de los niveles más avanzados del pensamiento matemático, implicaría algo más que la pura obtención de afirmaciones lógicamente necesarias a partir de un puñado de axiomas. Para destacar que la matemática, al menos tal como se ve en los libros de texto que la enseñan, no se limita a una disciplinada obtención de afirmaciones necesarias, afirma Poincaré que "si abrimos cualquier libro de matemática, en todas sus páginas el autor anuncia su intención de generalizar alguna proposición ya conocida" (1905, 2), y en la misma dirección, para Mason y Johnston-Wilder "una lección sin la oportunidad de que los alumnos generalicen, no es una lección de matemática" (2004, 137).

La caracterización de las abstracciones en empíricas y teóricas también se ha expresado por el tipo de lenguaje que se utiliza para conectar la información, dividiéndolas en 'primarias' y 'reflexivas'. En las primarias, los conceptos se obtienen por relaciones establecidas en el mismo nivel que los objetos relacionados, de modo que el sistema de elaciones no es más abstracto que la información que se conecta en ese sistema. Hablando en el lenguaje de grafos, los nodos y los lados del grafo resultan, en una abstracción primaria, de la misma naturaleza. Por el contrario, en las 'reflexivas', las relaciones se producen en un nivel de mayor abstracción, con vínculos menos ligados a un contexto específico; aquí, menos que reconociendo semejanzas entre objetos de alguna familiaridad, la abstracción procede estableciendo relaciones entre objetos que pueden lucir como muy disímiles en niveles cada vez más lejanos. Esa progresiva distancia entre los niveles es vista por Piaget como indicador de un pensamiento abstracto: "Todo el desarrollo de la actividad mental desde la percepción y el hábito hasta la representación y memoria, como las operaciones superiores del pensamiento formal y del razonamiento es así función de esa distancia gradualmente creciente […] de realidades cada vez más alejadas" (Piaget 2003, 21).

En el marco de los niveles de abstracción, Mitchelmore y White (2004, 2007), consideran que si bien la abstracción empírica participa en la construcción de muchos conceptos de la matemática tanto elemental como avanzada, la abstracción teórica prevalece en la segunda, y se expresa en un lenguaje que se halla desligado de contextos particulares, adquiriendo significado por su pertenencia a un sistema formal. Esta virtud de que los significados de los conceptos matemáticos se adquieren en el interior de un sistema, de modo independiente a cualquier contexto externo, es lo que los autores denominan 'mundo autocontenido'. Los conceptos que habitan este mundo tienen una relación con los que se obtienen de las abstracciones empíricas, pero se hallan en otro nivel y no reciben de ellos su validez ni significado.

Figura 1. El pasaje de la abstracción empírica a la abstracción teórica



Fuente: Elaboración propia a partir de Mitchelmore y White (2004, 335)

En la Figura 1 se intenta ilustrar que el espacio en donde tiene lugar la abstracción teórica se encuentra en un nivel distinto al que da lugar a las abstracciones empíricas. La flecha ascendente indica el proceso de formalización, que genera conceptos abstractos fundamentales a través de definiciones o axiomas de los que se desprenden resultados de órdenes cada vez más desligados del posible estrato empírico en el que se hubieran originado en estadios previos. Los conceptos y, en especial, las relaciones entre ellos establecidas en el sustrato teórico sólo tienen un significado que les es conferido por la misma red en la que se disponen. Los conceptos que se hallan en el espacio de la abstracción teórica se posicionan a una distancia de cualquier sustrato empírico que aumenta de magnitud en la medida que se progresa en los niveles de abstracción.

Se comprende que la abstracción teórica que se muestra en la Figura 1 engendra, a su vez, su propio lenguaje de términos que se operan bajo una cierta gramática, y que debe también aprenderse ya que sus convenciones lo alejan del lenguaje natural: ambos son abstracciones, el lenguaje de todos los días y el lenguaje matemático. Pero el matemático es más pobre ya que impide los matices normalmente introducidos por la ambigüedad de las expresiones coloquiales: "en el lenguaje matemático, cada construcción gramatical debe tener exactamente un único significado. Este significado, es frecuentemente seleccionado de modo arbitrario" (Epp 2003, 888). Es este distanciamiento el que explica que las tareas que exigen un modelado en el lenguaje matemático provoquen altas tasas de fracaso, al ser presentadas en el lenguaje cotidiano, pues los alumnos novatos privilegian el significado convencional, descuidando la estructura del discurso matemático cuya sintaxis procura garantizar expresiones carentes de ambigüedad (Lerman 2005, 179-183). La diferencia entre el lenguaje del nivel de la abstracción teórica y el del plano de la abstracción empírica es de tal magnitud que ha sido comparada con la que separa el lenguaje escrito del lenguaje hablado; estarían entre sí en la misma relación que guarda un lenguaje extranjero con el lenguaje materno. Los significados y matices de los vocablos de un idioma extranjero solo son gradualmente adquiridos con su uso en situaciones específicas diversas; del mismo modo, "en matemática, los conceptos usualmente emergen como herramientas. Las primeras propiedades que los alumnos pueden captar son las más simples. Pero su uso frecuente los familiariza como partes del razonamiento, convirtiéndolos en objetos" (Vergnaud 2011, 26). De esto se deduce que la lectura en el nivel de la abstracción teórica requiere, como la capacidad de leer en la lengua materna, un aprendizaje y su ejercicio.

Esta introducción meramente sitúa el campo de la discusión en términos muy generales, suficientes para el propósito de este capítulo; si, en cambio, se desciende al nivel de detalle y se indaga por la naturaleza de la abstracción misma, las concepciones se diversifican conforme se desplaza la perspectiva de análisis, y no será la misma desde el constructivismo que del logicismo o el intuicionismo, para mencionar tres de ellas. En el prefacio de la obra que introduce la corriente de investigación del AMT, se lee que "existe una considerable brecha entre el modo en que las ideas propias de la matemática avanzada son construidas y el modo en que las mismas ideas son presentadas en un orden deductivo" (Tall 1991a, xvi). Nuevamente aparece aquí una suerte de inversión entre el mundo cristalizado de la abstracción teórica y los primeros tanteos de la abstracción empírica; Tall añade que "la presentación de la teoría matemática como una secuencia de definiciones, teoremas y pruebas (tal como sucede en un típico curso universitario) podría mostrar la estructura lógica de la matemática, pero obstaculiza el desarrollo progresivo de la mente..." (xvi). El término genérico de 'presentación de la matemática' se aplica de modo especial a los libros de texto, donde ciertamente son las decisiones del autor las que definen las oportunidades del aprendizaje del lector.

En la siguiente sección se establece el entorno conceptual que proporciona las categorías del análisis de la naturaleza de la abstracción que se presenta en el área del Cálculo y el Álgebra Lineal. El marco interpretativo de la abstracción elaborado por la AMT, a través de su concepción de lo que denominan los tres mundos de la matemática "podría proporcionar el fundamento para la construcción de una teoría unificada de la abstracción" (Mitchelmore y White 2007, 7).

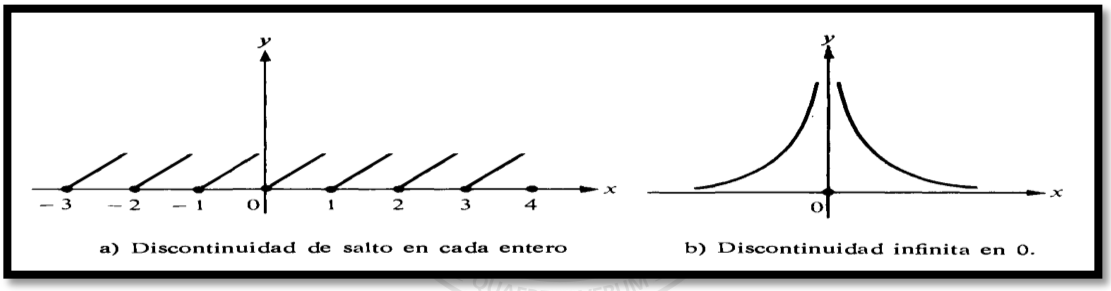
2. Marco Teórico

La corriente del AMT originada hacia fines del siglo XX, establece categorías y nociones cognitivas de complejidad y naturaleza diferente de las por entonces operantes. La psicología de la educación matemática se reducía a los procesos de aprendizaje en los niveles elementales, con casi inexistentes estudios dedicados a los niveles avanzados: "las investigaciones orientadas al nivel elemental o medio se fijan una perspectiva curricular y conceptual muy amplia […] estudian con profusión el desarrollo de conceptos elementales que a los matemáticos universitarios les resultan de escasa relevancia y utilidad" (Thompson 1999, 2). La elección de la corriente teórica del AMT en este capítulo se justifica, precisamente, por la inclusión en su programa de investigación de los niveles de abstracción propios de la matemática del nivel universitario. Para uno de sus destacados miembros, al momento del nacimiento de la corriente, "sólo unos pocos teóricos, como Piaget y Brunner, tenían para decir algo que fuera particularmente relevante para la matemática avanzada" (Tall 2004d, 1), a los que pueden añadirse "los trabajos de Ausubel y Novak y los de Skemp, en tanto se aplican a todos los individuos de todas las edades" (Tall 1981d, 319).

2.1. Los tres mundos de la matemática

David Tall sintetiza en cuatro artículos (Tall 2004a, 2004d, 2005g, 2011) los hilos conductores que enhebran la teoría, mediante estructuras que llama 'mundos'. El primer mundo emerge de nuestras percepciones del mundo exterior y se compone de nuestros pensamientos acerca de las cosas percibidas, pero no solamente del mundo físico sino también de nuestro propio mundo mental de significados, de modo que la reflexión y una mayor sofisticación del lenguaje nos permite vislumbrar objetos que no existen en el mundo exterior, tales como una línea que tiene atributos de infinitud y nulidad de espesor; el autor denomina a este mundo *embodied world*, que suele traducirse como mundo incorporado. Pertenecen, por definición, a este mundo no solamente nuestras percepciones mentales de los objetos exteriores, sino las concepciones internas que usualmente están acompañadas de imágenes visuales en el espacio, como podrían ser las propias de una geometría euclídea, tal como la imagen mental que puede acudir en ayuda del concepto euclídeo de 'plano', y que puede ser sugerida por una representación gráfica incluida en un libro de texto de tal objeto. Los libros de texto utilizan registros, por lo general gráficos, para introducir al lector en este nivel; por ejemplo, para introducir la noción de continuidad, como lo hace Tom Apostol, autor de un texto clásico del Cálculo: “Antes de dar una definición rigurosa de continuidad, comentaremos este concepto brevemente en forma intuitiva para orientar al lector sobre su significado. Prescindiendo del rigor podemos presentar el asunto así…” (Apostol 2001, 155). Puede verse en este párrafo con el que el autor comienza la presentación del tema, “una de las ideas más importantes y más fascinantes de toda la matemática” (155), su preocupación por indicar que las ideas que va a exponer, ya sea en registros gráficos o algebraicos, no serían aceptadas desde un punto de vista riguroso como una definición de continuidad; es aceptando este supuesto que presenta la Figura 2 para ilustrar el caso de funciones que no cumplen la idea intuitiva de continuidad.

Figura 2. Reproducción de ejemplos de funciones discontinuas de libro de texto



Fuente: (Apostol 2001, 155)

El segundo mundo está habitado por los símbolos utilizados para la manipulación de objetos en la aritmética, el álgebra, el cálculo vectorial Comienzan por ser *acciones* (por ejemplo, contar) para luego ser condensadas en conceptos mediante el uso de símbolos que nos permiten alternar sin esfuerzo desde el proceso de hacer matemática al de pensar con *conceptos* matemáticos. El autor lo denomina ‘*proceptual world*’ y también ‘mundo simbólico’, un mundo que es generado mediante sucesivas generalizaciones. El predicado ‘simbólico’ aquí no debe aplicarse a los símbolos en general como género, sino a la especie de símbolos utilizados en los cálculos algebraicos o numéricos o manipulaciones proposicionales, y por lo general corresponden a acciones sobre los objetos (como podría ser calcular el límite del cociente incremental de una función) que son condensadas y comprimidas en un símbolo como concepto (por ejemplo la derivada). Esta dualidad del símbolo es lo que Tall denomina *procept*: “un símbolo usado dualmente como proceso (tal como la adición) y concepto (tal como la suma) es llamado un *procept* (Tall 2005g, 2). El término ‘proceptual world’ proviene de ese vocablo, propio de la teoría, que aquí se traducirá por ‘procepto’, para replicar en castellano la generación por contracción de los vocablos ‘process’ y ‘concept’ con la que se pretende designar la alternancia entre ambos a través del símbolo, cuando éste es utilizado dualmente para representar tanto el proceso como el concepto. Si bien el procepto así introducido por Tall queda identificado por la dualidad de un signo, el mismo autor establece que las vías de acceso a él pueden construirse mediante diversos recursos, tales como (Tall 1997a, 296) visualizaciones espaciales que permiten observar y eventualmente experimentar con lo que se observa, enfoques numéricos, simbólicos, gráficos y formales.

Si bien el proceso y el concepto comparten un símbolo, sus significados son muy diferentes. Por ejemplo, el símbolo de ortogonalidad “⊥” será considerado, muy probablemente, como proceso para un estudiante de geometría básica (el proceso por el que puede decidirse la ortogonalidad de dos rectas, por ejemplo), mientras que en el estudiante de matemática avanzada evocará más bien un tipo de relación que guardan entre sí dos objetos de un espacio hermítico. Para el primero, la ortogonalidad se podría predicar entre dos rectas mediante un proceso –como podría ser una escuadra–, mientras que para el segundo la ortogonalidad es una relación entre objetos arbitrarios que depende de la geometría inducida por un producto interno.

Puede considerarse el ejemplo del plano tangente a una superficie de nivel de un campo escalar diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$. La definición del plano tangente que se materializa a través de su ecuación lleva incluida la dualidad propia del procepto, dado que proporciona: (a) un *procedimiento* para obtener su expresión cartesiana, (b) el *concepto* de un elemento plano que constituye la mejor aproximación lineal a la superficie y que resulta ortogonal al vector gradiente del campo escalar en el punto de la superficie de nivel.

Es posible observar este aspecto en la presentación que del plano tangente hace un texto de uso corriente en carreras de ingeniería (Marsden y Tromba 1991), un fragmento del cual se reproduce en la Figura 3. Las definiciones en matemática –como en cualquier otro dominio– son arbitrarias; sin embargo, solo se consolidan en un dado campo aquellas que son eficientes para concentrar la información acerca de un dado hecho. Es en este sentido que se puede hablar de que una definición sea apropiada, que es lo que procura el autor, al presentar el concepto en los dos mundos, lo que le hace decir “vemos que es razonable *definir* el plano tangente a S como el plano ortogonal al gradiente” (161; cursiva en original).

Figura 3. Una presentación del plano tangente a una superficie de nivel (fragmento y composición), con registros gráficos y algebraicos

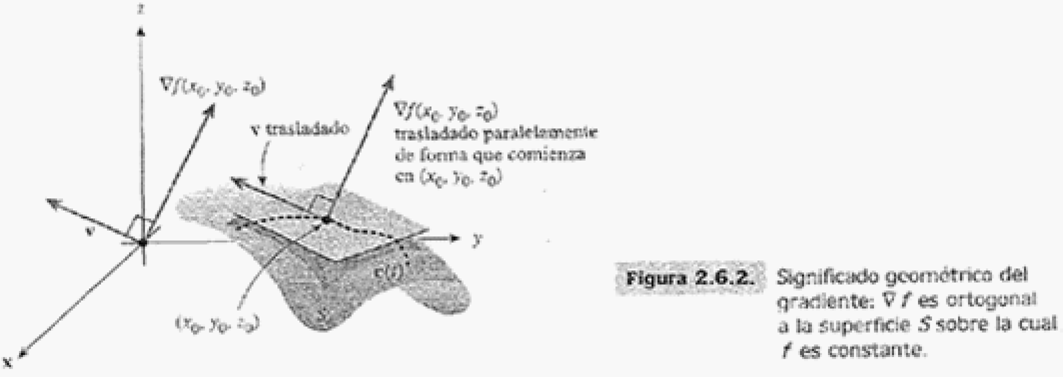


Figura 2.6.2. Significado geométrico del gradiente: ∇f es ortogonal a la superficie S sobre la cual f es constante.

DEFINICIÓN: Planos tangentes a superficies de nivel Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para k constante. El ***plano tangente*** a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por medio de la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la Ecuación (1).

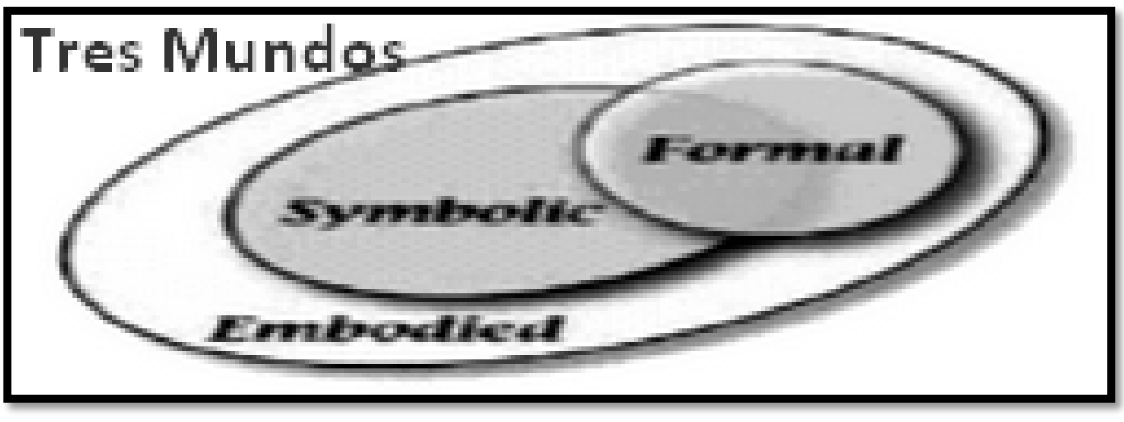
Fuente: Marsden y Tromba (1991, 160-161)

El tercer mundo de la matemática es el 'mundo formal', está basado en las propiedades, expresadas en términos de definiciones formales que se desprenden implícitamente de un sistema axiomático que especifica las estructuras en las que habitan los elementos y que los organizan en sus relaciones mutuas. Se designan, genéricamente, como 'sistemas axiomáticos formales' (Klimovsky 1994, 289, Klimovsky y Boido 2005, 109).

Un plano, en el mundo formal, puede convertirse en una variedad lineal de codimensión uno definida por una forma lineal en una estructura denominada espacio vectorial, definición que lo distancia drásticamente de los mundos previos: ya no se tiene una imagen como sustrato personalizado, ni siquiera una ecuación que permita una dualidad y remita a un proceso de obtención, puesto que los puntos que lo constituyen podrían ser objetos complejos en sí mismos, tales como funciones. Que esta definición de 'plano' en un libro de texto termine siendo significativa es una responsabilidad compartida entre el autor y el lector, según el modo en que el texto se organiza como estructura. La intensidad de la demanda cognitiva de un ejercicio que incluya la noción de 'plano' estará vinculada a los mundos a través de los que deba desplazarse un alumno para resolverlo: será tanto más exigente cuanto más lo obligue a incursionar en el mundo formal, posibilitando la incorporación de conceptos más flexibles. Si los ejercicios se mantienen en niveles de demanda que permiten lograr respuestas construidas desde el primero o segundo mundo, probablemente el alumno desarrolle mecanismos de respuesta rutinarios que “pueden convertirse en un estilo de vida” (Tall 2004d, 6). Los tres mundos no se generan en el vacío ni son etapas sucesivas. Por el contrario, las pruebas formales que los estudiantes deben enfrentar en los cursos universitarios, cuando se introducen en la cultura de la matemática avanzada, son construidas sobre experiencias previas.

En ocasiones, son los mismos autores de los libros de texto los que explicitan la diferente ‘atmósfera’ que se respira en el mundo formal. Tal es el caso de Kostrikin y Manin , que advierten desde la primera página de un texto de Álgebra Lineal; “En una general definición de un espacio vectorial los números reales son remplazados por un cuerpo arbitrario y las más simples propiedades de la suma y multiplicación de vectores son postuladas como axiomas […] ninguna traza de la tridimensionalidad del espacio físico permanece en la definición” (1997, 1). El mundo formal permite el acceso a un espacio donde caben una mayor cantidad de objetos, en tanto se limiten a cumplir una lista de axiomas establecidos de antemano. Si bien el mundo formal puede estar sobreimpreso sobre los dos anteriores, y utilizar sus imágenes o símbolos para figurarse los objetos abstractos que allí se definen, también es necesario trascender esos mundos perceptuales; en caso contrario, los mundos previos pueden ser un yugo, según la conocida expresión del grupo Bourbaki. En el mundo formal, las expresiones mismas de las abstracciones se ven muy simplificadas, aunque exigen que el lector se halle en condiciones de decodificarlas.

Figura 4. Los tres mundos del pensamiento matemático avanzado en la Teoría de David Tall



Fuente: Elaborado a partir de *The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof* (Tall 2005g, 1)

La Figura 4 destaca pictóricamente que los mundos no deben entenderse como progresivos ni como excluyentes, que el segundo y tercero yacen sobre el primero y que la matemática formal se construye sobre una combinación de los pensamientos propios del mundo incorporado y del mundo simbólico’. El resultado es de máximo interés: el pensamiento formal en matemática avanzada se halla a contramano de la experiencia, ya que en lugar de proceder a un análisis de los conceptos existentes para determinar sus propiedades, comienza por la selección de esas propiedades definiéndolas como axiomas para luego observar los objetos que habitan esa estructura; ulteriormente, por deducción obtiene otras propiedades que necesariamente habrán de tener tales objetos.

Esta inversión no es un efecto indeseado, un mal colateral de la matemática avanzada, sino uno de sus rasgos propios, y todavía más, un objetivo central. En palabras de un elevado exponente del AMT, “si un estudiante desarrolla la capacidad de expresar formalmente situaciones matemáticas, ha logrado un avanzado nivel de pensamiento matemático. Alcanzar esta capacidad de abstraer podría ser el objetivo más importante de la educación en matemática avanzada” (Dreyfus 1991, 34). La trascendencia que la última observación tiene sobre las estructuras de los libros de texto no es menor, puesto que una presentación directa de los conceptos residentes en el mundo formal será inevitablemente mediada por el estudiante con los contenidos de sus dos mundos anteriores que se presten a alguna familiaridad. Por otra parte, una presentación que transite poblando los dos primeros mundos, podría generar en el estudiante los hábitos de pensamiento rutinarios adheridos a los ejemplares particulares de los conceptos a los que se aspira enseñar.

El desarrollo del tipo de pensamiento que evoluciona a través de los tres mundos se reconoce a través de la historia; “el cambio del perceptual mundo de nuestra experiencia humana al mundo de la aritmética, álgebra y el cálculo simbólico es un cambio profundo en el proceso de pensamiento humano” (Katz y Tall 2011, 6). El Cálculo fundado por primera vez con rigurosidad en la época de Cauchy, todavía mantenía relaciones con la percepción de fenómenos aprehensibles desde una postulada intuición sensible. Estos fenómenos por lo general pertenecían al mundo de la geometría euclídea (longitud, área, volumen), o al de las percepciones de cambios a través del tiempo (velocidad, aceleración), conectados a través del manipulable simbolismo del Cálculo. El paso adelante dado por Cantor, Dedekind y Weierstrass introduce ya una interpretación en términos de nociones como orden y completitud, para llegar a Hilbert, cuya introducción de la axiomática formal “cambió radicalmente la forma en que se puede pensar la matemática" (Katz y Tall 2011, 6). Se produce allí un desplazamiento de la atención, que se aparta de los fenómenos percibidos físicamente y concebidos mentalmente como objetos de pensamiento, para dirigirse a las propiedades que debieran satisfacer una cierta clase de fenómenos, que son caracterizados a posteriori por su capacidad de cumplir el juego de axiomas predeterminado. Esta perspectiva radicalmente nueva desprende el pensamiento matemático de las restricciones impuestas por las percepciones, y le habilita a ingresar en el mundo de los sistemas formalmente definidos, cuyas propiedades ulteriores son ahora deducidas del conjunto de sistemas consistentes que lo rige. Este desprendimiento, sin embargo, tiene una exigencia en términos de demanda cognitiva; alcanzarlo es una necesidad propia de la matemática avanzada.

En cuanto al lenguaje mismo que se utiliza en cada uno de los mundos, debe decirse que necesariamente es diferente. En el primer mundo el lenguaje se utiliza con una complejidad creciente para describir las propiedades de los objetos y establecer a partir de ellas diversas clasificaciones. En el segundo, el simbolismo se introduce en el discurso, con la dualidad del 'procepto' para describir tanto una acción como un concepto (a la manera que en el lenguaje cotidiano un mismo vocablo, como podría ser 'juego', puede actuar o bien como verbo o bien como sustantivo). En el mundo formal, el lenguaje utiliza ahora una batería de términos técnicos para definir conceptos, por lo general de modo implícito mediante sistemas axiomáticos formales; este lenguaje será visto como un obstáculo o como una virtud, según el grado de desarrollo alcanzado por el que se encuentra obligado a articularlo. En opinión de Cohen y Nagel (2000a: 218), "en lugar de juzgar las abstracciones de la lógica como un defecto, debemos considerarlas una virtud, pues para razonar válidamente acerca de un objeto de estudio solo precisamos conocer sus caracteres más generales, sin necesidad de recargar nuestro pensamiento con un bagaje intelectual inútil". Sirve retomar el ejemplo del espacio vectorial lineal, donde posiblemente el alumno ha incorporado la noción de vector en un espacio de dimensión 2 o 3, pictóricamente descripto por una flecha: el lenguaje del mundo incorporado. Sin embargo, sobre esa imagen se sobreimprime el símbolo de par o terna ordenada, un 'procepto' que permite tanto operar con los vectores como representar el elemento mismo: se está en el mundo simbólico. En el mundo formal, el vector es un elemento de un espacio vectorial, estructura axiomática formal. El vector tiene todas las propiedades que resultan de estos axiomas, y esta construcción formal se superpone con las anteriores, en una transición que no procede de manera alguna linealmente, dado que el mundo incorporado mantiene una poderosa influencia sobre los significados del mundo formal, influencia que tanto puede resultar favorable como obstaculizadora.

Una noción introducida por la teoría para tomar en cuenta la influencia entre los mundos es denominada *met-before* (en el sentido de formado previamente, preformado), definida como "una corriente cognitiva que surge de previas experiencias y que es evocada para dar sentido a una situación actual […] lo que debe ser tenido en cuenta para el diseño de las secuencias, dado que los temas posteriores serán construidos sobre los anteriores" (Tall 2005g, 6). La noción de *met-before* reconoce en el campo de la matemática avanzada la validez de la declaración que Ausubel: "el más importante factor que influye el aprendizaje es lo que los alumnos ya saben" (citado por Tall, 2005g, p.15), asienta epistemológicamente en Aristóteles (1967c, 7) "Todo conocimiento racional, ya sea enseñado, ya sea adquirido, adquirido mediante un acto más o menos perfecto de razonamiento, se deriva de conocimientos anteriores". Lo que efectivamente está suficientemente documentado por investigaciones producidas en el seno de la corriente (Chin 2011, Chin y Tall 2002, 2001, Weber 2001, Weber y Alcock 2005) prueban que, en la práctica, los estudiantes construyen sus propias secuencias conforme al conjunto de experiencias previas que les resulten más resonantes con las nuevas estructuras, y que la intensidad de tales reconstrucciones proviene de la densidad de ideas que yacen en los dos primeros mundos. Las interacciones son inevitables, y en algunos casos el mundo incorporado puede ayudar a dotar de significado a la teoría formal de un modo natural, mientras que en otros puede resultar en un obstáculo. En cualquier caso, los resultados establecen que la abstracción y demandas cognitivas surgidas en el mundo formal son de mayor exigencia y cualitativamente diferentes que las necesarias para transitar los dos primeros mundos. La transición entre los mundos importa una reconstrucción mental de las estructuras cognitivas, en la medida en que los recursos puramente instrumentales con validez y eficacia localizada en los dos primeros, se tornan cada vez menos apropiados para enfrentar la complejidad del tercero.

Richard Skemp (2006) distingue los dos grados de demandas cognitivas que requieren sendos tipos de comprensión a los que les llama 'instrumental' y 'relacional'. La comprensión relacional permite saber qué hacer y porqué, mientras que en la instrumental están las reglas que permiten saber qué hacer, pero se trata de "reglas sin razones" que por lo tanto carecen de la flexibilidad necesaria para adaptarse a una modificación del escenario, por leve que fuese. Además de la rigidez, el segundo argumento del autor que explica su incapacidad de adaptación a los desplazamientos es que “usualmente requiere una multiplicidad de reglas, antes que unos pocos principios de aplicación muy general” (Skemp 2006, 89), una observación que resulta consonante con la citada de Cohen y Nagel. El mencionado instrumentalismo resulta de “que la mayoría de los estudiantes aprenden en sus cursos de matemática es a ejecutar un gran número de procedimientos rutinarios [...] para obtener respuestas a una claramente delimitada clase de ejercicios” (Dreyfus 1991, 28).

En el AMT hay acuerdo en que “la mayoría de la instrucción matemática, desde el nivel elemental al secundario podría denominarse ritual: ‘hago esto, entonces hago esto, entonces hago...’ y así siguiendo” (Davis 1988, 13). Dado que el instrumentalismo es de modo tan manifiesto poco flexible, limitado y requiere un mayor número de reglas para obtener un mismo resultado, ¿Por qué subsiste en los libros de texto, especialmente en los del nivel no universitario? ¿Por qué persiste en la enseñanza? Skemp señala que (a) “dentro de su propia esfera, el instrumentalismo en matemática es más fácil de comprender; en ocasiones, mucho más fácil” (Skemp 2006, 92); (b) sus resultados son inmediatos y visibles, y confieren al estudiante una sensación de confianza y seguridad en lo que están haciendo, además de la posibilidad de controlarlo mediante marcas en los textos, como la inclusión de las respuestas a los ejercicios propuestos, en algunos casos tomando la modalidad de una resolución completa.

En lo que respecta a la comprensión relacional, que se ubica en la región que en la introducción se ha denominado ‘abstracción teórica’, la teoría de Skemp señala entre sus rasgos (a) la flexibilidad para desplazarse entre los tres mundos, dado que al conocer no sólo un método sino los motivos por los que funciona, da la posibilidad de relacionar el método con el problema, y por lo tanto, adaptarlo a problemas más complejos o problemas en otro contexto; (b) una menor exigencia de retención de información, puesto que no debe contarse con una batería de pares métodos-problemas, ni crear un nuevo método para cada nueva clase de problemas; (c) es un objetivo en sí mismo pues implica un salto cualitativo en los esquemas cognitivos involucrados.

Con alguna simplificación, podría decirse que los mundos que Tall denomina simbólico y formal, están más densamente poblados por pensamientos que contienen las abstracciones del tipo teórico, mientras que la abstracción en el mundo incorporado es más propia de la que se ha llamado empírica en la introducción de este capítulo. La precisión del significado de los términos generalización, síntesis y abstracción permite establecer finalmente líneas demarcatorias entre el pensamiento matemático avanzado y el que no lo es, de lo que se ocupa el siguiente apartado.

2.2. La abstracción en el Pensamiento Matemático Avanzado

Puesto que la corriente AMT pretende concentrarse en el pensamiento matemático avanzado, necesita previamente establecer la frontera que lo separa del Pensamiento Matemático Elemental (*Elementary Mathematical Thinking*), categoría que incluye tanto al nivel escolar como al de enseñanza secundaria. La teoría empieza por diferenciar claramente entre los términos *abstracción* y *generalización*, utilizados en contextos menos técnicos prácticamente como sinónimos para denotar tanto productos como procesos, tanto generalizaciones por ampliación del campo como generalizaciones por restructuración del campo de aplicación (Harel y Tall 1989, 38-42). Conviene precisar que ya desde los primeros años del nivel secundario los estudiantes usan ideas completamente abstractas en la manipulación algebraica, de modo que la distinción entre el nivel avanzado y el elemental no está atravesada por la utilización de la abstracción, aunque sí por el modo en que tal abstracción interviene y la intensidad con la que se sitúa en el foco del currículum. Una de las características distintivas entre el pensamiento matemático elemental (EMT) y el avanzado (AMT) lo constituye la complejidad y el modo en que tal complejidad es abordada: la abstracción es un poderoso proceso que permite cambiar de un nivel de detalle a otro más elevado, para poder enfrentar problemas y estructuras de muy elevada complejidad.

Para Gray y Tall (2007) es necesario diferenciar por lo menos las tres funciones gramaticales que dan cuenta de otros tantos significados de la abstracción, que en el inglés original en que se expresan los autores se construye siempre con la raíz *abstract*. Cuando se construye como verbo (*to abstract*) designa un proceso, una acción; cuando funciona como adjetivo es una propiedad (*to be abstract*), mientras que como sustantivo (*an abstract*) es un concepto. Proceso, propiedad y concepto son, entonces, otras tantas significaciones que se corresponden a los usos de abstracción que se maneja en esta teoría. Los conceptos matemáticos son entonces vistos como de tres tipos: “el primero basado en la percepción de objetos, el segundo basado en procesos que son simbolizados o concebidos dualmente como procesos y conceptos (procepto) y un tercer tipo basado en una lista de propiedades que actúan como una definición” (Gray y Tall 2007, 23). Cada uno de estos es una abstracción en sí misma, una imagen mental de un

objeto o colección de objetos que son percibidos (por ejemplo, la de pentágono), un proceso mental que llega a ser incorporado como un concepto (el clásico ejemplo del *proceso* de contar que se convierte en el *concepto* de número), un sistema formal (como por ejemplo, la noción de espacio vectorial, que es construido axiomáticamente).
Además de los diferentes tipos de abstracción, los teóricos consideran conveniente distinguirlas de la generalización. La abstracción difiere cualitativamente de la generalización, aunque la abstracción incluye una generalización. La generalización es un proceso común a los niveles elementales y avanzados, es un proceso que involucra la expansión de un esquema cognitivo, de manera que lo que previamente a la generalización es una totalidad, tras ella pasa a ser un caso de un conjunto más amplio, preservando sus propiedades sin ninguna modificación; siempre que se generaliza, se obtienen conclusiones que en particular son también satisfechas por el caso desde el que parte la generalización. Por ejemplo

(a) La generalización del plano euclídeo R^2 al espacio euclídeo R^n, con n un número natural que puede también tomar el valor 2, reproduciendo el ejemplar del que R^n resulta una generalización.

(b) La generalización de los ejemplos 2 + 3 = 3 + 2, 1 + 5 = 5 + 1 es la conmutatividad de la suma escrita como $x + y = y + x$, de donde proceden mayores generalizaciones según el tipo de conjunto del que se permitan admitir valores de x e y.

El proceso complementario de la generalización es denominado “especialización” (Tall 1988, 2), y consiste precisamente en concebir el punto de partida como un caso particular comprendido en el alcance de la generalización. La abstracción es un proceso muy diferente. Consiste en el aislamiento de específicos atributos de un concepto de manera que ellos puedan ser independientes de todo conjunto de atributos que pudiera estar ocasionalmente adherido al concepto. La abstracción introduce implícitamente una generalización, pero en un sentido más profundo: se trata de una generalización de argumentos. Basta considerar la resolución de un sistema de ecuaciones en tres variables como una generalización del de dos para comprobar que no hay allí abstracción alguna, solamente se está expandiendo el alcance de un método que, en su esencia, no se modifica. También de naturaleza diferente a la generalización y la abstracción es el proceso de síntesis, cuyo significado original remite a la composición o combinación de partes de una manera que el conjunto resultante es una entidad dotada de sentido y consistencia interna. Se considera la síntesis un prerrequisito de la abstracción, y se afirma que es necesario incrementar su presencia en el currículum proponiendo una mayor intensidad en la ejercitación tanto en el aula como en los textos, pero sobre todo en los textos, pues si sólo se proponen ejercicios corrientes que no requieren ninguna actividad de síntesis, el estudiante no encuentra motivo alguno para intentarla y podría resultar en tal caso aplicable la semblanza de Dreyfus (1991, 36): "Los estudiantes, específicamente los del nivel preuniversitario, [...] creen que memorizar es extremadamente importante y que hay poca relación entre las diversas áreas (álgebra, geometría...) que han aprendido". La ausencia de síntesis en las actividades de los estudiantes no es sorprendente ante un *curriculum* que introduce una fuerte clasificación entre las asignaturas (Bernstein 2003c).

Es la síntesis la que, una vez configurada, queda cristalizada en una abstracción. Se puede mencionar en el terreno del álgebra de estructuras, que las sucesivas síntesis de conceptos como distancia, norma, ortogonalidad han conducido a los espacios euclídeos explicitados axiomáticamente, o también el modo en que la síntesis de diversas tentativas para una resolución de las ecuaciones de Fredhölm llevaron a la introducción de los espacios funcionales (Dorier 2000).

La abstracción tiene un sentido más profundo que la generalización, desde que se trata de una generalización de los argumentos mismos (Tall 1988, Tall 1991b, Dreyfus 1991, Dubinsky y Tall 1991). De cualquier abstracción puede afirmarse que: (a) todo argumento válido aplicable a las propiedades abstraídas que se aplique a otros ejemplares (suponiendo los haya), también será válido para ellos; lo que es más general, pues, es la argumentación, y de allí su mayor alcance; (b) Dado que los argumentos sólo fluyen de las propiedades abstraídas ignorando todo el resto, al no haber distracción alguna de elementos accidentales, la abstracción es más sencilla, desde el punto de vista lógico, pero más compleja desde el punto de vista de la demanda cognitiva. En efecto, si bien en términos estrictamente matemáticos la focalización en las propiedades abstraídas materializadas en axiomas permite argumentos de mayor alcance con menores supuestos, en términos cognitivos, por el contrario, las dificultades emergentes son mayores. Si la generalización es una ampliación de un esquema cognitivo, la abstracción, en cambio, introduce una reconstrucción de tal esquema, ya que todas las propiedades del concepto abstraído deben resultar mediante deducciones a partir del sistema axiomático. Entre éstas se cuentan también algunas que posiblemente en el concepto original eran propiedades 'sabidas' y que ahora deben resultar de una demostración, lo que inevitablemente produce un período de confusión durante el cual la estructura cognitiva es reconfigurada.

Retomando ahora el ejemplo dado en este mismo apartado, la situación puede describirse en estos términos: el estudiante ‘sabe’ que para cualquier número x en el conjunto R de los reales se tiene que $0\ x = 0$ (‘cualquier número multiplicado por cero es cero’). Entre las estructuras abstractas más simples necesarias para los desarrollos propios del álgebra lineal se tiene un conjunto llamado Cuerpo K, (del cual R es un ejemplar), donde también se verifica la propiedad $0\ x = 0$ con la diferencia que ahora x, 0 son elementos del Cuerpo que se llaman escalares, y como la propiedad anterior no ingresa en la estructura axiomática mediante la cual queda definido el Cuerpo, necesita de una demostración a partir de los axiomas. Esta es la situación en la que el aparato cognitivo del estudiante adquiere inestabilidad, hasta que finalmente alcance el estado de admitir que toda propiedad del Cuerpo abstracto K (hasta las que le resultan más familiares por su conocimiento del cuerpo R original) habrá de resultar de los axiomas, esto es que podrá deducirse mediante el proceso llamado ‘demostración’.

El estado de inestabilidad de las estructuras cognitivas es, en este nivel de abstracción, no sólo previsible sino prácticamente inevitable, ya que el estudiante que debe deducir algo como $c\ \mathbf{0} = \mathbf{0}$ está obligado a “hacer una casi esquizofrénica separación entre la íntima convicción intuitiva de que lo que está probando es verdadero y el formal proceso de demostración que establece precisamente esa veracidad” (Tall 1997g, 11). El experto no tiene inconveniente en efectuar la prueba dentro de los límites que le permite un sistema de axiomas, puede rápidamente limitar sus argumentos para asegurarse que quedan incluidos en las reglas del juego. Pero los alumnos, sigue diciendo Tall, pueden “verse profundamente perturbados al no distinguir qué es aquello que les está ‘permitido saber’ de su conocimiento no formal como opuesto al ‘conocimiento’ proveniente de las pruebas deductivas” (11).

Los autores de un texto clásico del Álgebra Lineal (Hoffman y Kunze 1990) se aseguran que el lector comprenda la necesidad de este proceder mediante una advertencia acerca de la posibilidad que en un dado Cuerpo K, se verifique la igualdad $1 + 1 = 0$, sin contradicción alguna con lo que sucede en el particular cuerpo R. A la inversa, familiares ‘propiedades’ como $x + 0 = 0$ ya no lo son (es uno de los once axiomas del Cuerpo), no en el sentido de que no se verifiquen, sino de que no pueden sino verificarse, pues en caso contrario no se estaría en un Cuerpo, no pudiendo entonces ser objeto de ninguna demostración; por el contrario, es una de las fuentes de donde manan las demostraciones del sistema formal.

Al menos un aspecto de la distinción entre generalizar y abstraer y las dificultades cognitivas implicadas ha sido expresada en el lenguaje de 'extensión' e 'intensión' (Cohen y Nagel 2000a, 2000b), según que un concepto sea considerado como una clase compuesta de objetos o bien como un conjunto de propiedades que determina cuáles objetos es lícito considerar incluidos en la clase, respectivamente. Desde esta perspectiva, el espacio euclídeo R^n, tiene una extensión en la que caben los espacios R, R^2, R^3..., mientras que para su intensión basta indicar que se trata de n-uplas ordenadas de escalares reales con las leyes habituales de suma y producto por un escalar, siendo las demandas cognitivas relativamente acotadas. La situación se modifica radicalmente cuando se tiene la abstracción de un espacio vectorial V_K sobre un cuerpo K. La imaginación no alcanza a cubrir la vastedad de su extensión, tanto en número como en naturaleza, y el estudiante–también el matemático– debe contentarse con su intensión que, para ser completa, requiere de un sistema de 21 axiomas. Desde el punto de vista de la lógica-matemática, resulta más simple deducir propiedades necesarias de cualquier objeto que pertenezca a la extensión de un concepto cuando se conoce su intensión, pero desde el punto de vista del desarrollo cognitivo, esa simplicidad tiene un elevado costo, al subvertir el orden de la adquisición del conocimiento para ajustar el orden del conocimiento ya adquirido, que se sitúa en el plano exclusivamente lógico. La intensión de un concepto determina qué rasgos debe tener un conjunto de objetos para que se lo acepte como tal, en tanto que su extensión comprende los objetos al que el concepto es aplicable. El orden lógico requiere que se comprenda previamente la intensión de un concepto para saber reconocer si un dado objeto pertenece a su extensión (para decidir si R es un Cuerpo debe saberse qué se entiende por Cuerpo). Sin embargo, "en el orden del *desarrollo* de nuestro conocimiento, es dudoso que exista tal prioridad [...] la asignación de una intensión convencional satisfactoria a un término que denota objetos con rasgos familiares comunes, es una tarea difícil y un logro relativamente tardío del pensamiento humano" (Cohen y Nagel 2000b, 46). En cualquiera de los términos del lenguaje, sea del lenguaje matemático, sea del lenguaje cotidiano, se trata de una abstracción en la que coexisten los dos aspectos inseparables de la extensión e intensión; las presentaciones de los sistemas axiomáticos producen una separación de ambos, a la vez que una inversión del orden natural en que se desarrollan los dos aspectos. Es esta inversión la que explicaría la mayor intensidad en la demanda cognitiva producida por la abstracción en los sistemas axiomáticos del mundo formal.

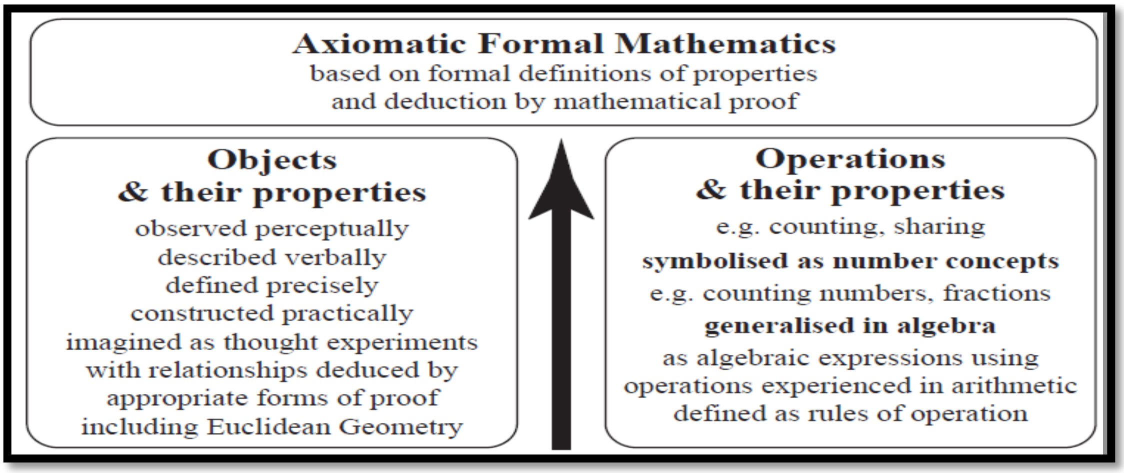
La potencial generalidad de una abstracción, queda determinada por la intensidad en que los dos términos se conjugan. En efecto, los objetos que resultan alcanzables por una dada abstracción (esto es, su extensión) están determinados por su intensión (esto es, su definición formal), de modo que una reducción de la abstracción se corresponde con un incremento de la intensión. Precisamente, dado que en un sistema axiomático las definiciones proceden fijando intensiones mínimas, es que resultan extensiones máximas, permitiendo una mayor cabida de objetos a los que le serán aplicables todas las propiedades *deducidas* de las definiciones mínimas.

La presentación axiomática directa en un libro de texto puede resultarle al estudiante demasiado arbitraria y vaga, al no estar precedida por una necesidad o sugerida por un problema. Un ejemplo específico perteneciente al área de este trabajo lo constituye la función δ llamada "Delta de Dirac", inicialmente surgida como una generalización del concepto de función (de hecho todavía sobrevive el nombre de 'función generalizada') e introducida para permitir captar los efectos de procesos casi instantáneos, y resistida por los mismos matemáticos. Sólo más tarde se desarrollaría la teoría abstracta de las distribuciones dentro de la cual la función δ ya no es una singularidad notable, sino meramente un ejemplar de una familia definida axiomáticamente en el espacio de distribuciones (Espacio de Schwartz), proceso de abstracción creciente, intensión decreciente, extensión creciente, acompañado del desarrollo paralelo del formalismo en el que se expresan estas evoluciones (Dorier 2000, Kolmogorov y Fomin 1975, Kreyszig 1993, Sobolev y Lusternik 1989).

Aquí se ha hablado de generalización sin ninguna especificación; los autores del AMT utilizan, en ocasiones, otros términos para establecer las distinciones entre la abstracción y generalización. La generalización hasta aquí presentada se denomina 'generalización expansiva' para recordar su carácter de ampliación de un esquema previo, en tanto que lo que se ha designado como abstracción es refinado en una subdivisión que se denomina 'generalización reconstructiva' y 'generalización disyuntiva' (Harel y Tall 1989, 38-40) para dar cuenta de que la reconfiguración de los esquemas cognitivos puede exigir tanto una reconstrucción de los previos, como la integración de uno nuevo (disjunto) a los ya existentes. También conviene precisar que, un mismo proceso considerado desde una u otra perspectiva puede implicar o bien una abstracción o bien una generalización. Se puede retomar el ejemplo específico relativo al álgebra de los espacios vectoriales con el pasaje del espacio bidimensional de $\mathbb{R}^2$ al tridimensional $\mathbb{R}^3$ y luego a $\mathbb{R}^n$. Desde el punto de vista puramente algebraico de las leyes suma y producto por un escalar, se tiene una sencilla generalización consistente en la aplicación de las mismas técnicas a cada una de las coordenadas en los sucesivamente ampliados espacios. Pero el *mismo* proceso ahora considerado desde la geometría de los espacios euclídeos implica transformaciones muy diferentes, como puede verse del simple pasaje de la geometría plana a tridimensional, y de ésta a la n-dimensional, y que exigen reconfigurar e integrar los esquemas previos, constituyendo por consiguiente una abstracción. Este ejemplo basta para observar que la discriminación entre la generalización y la abstracción no reside en el proceso mismo, sino en la totalidad del proceso considerado como un desplazamiento en una dada estructura (algebraica, en el caso del ejemplo), un pasaje hacia mundos formales cada vez más inclusivos. El fenómeno puede ser visto como un descalce de registros, en lo que a demandas cognitivas se refiere: una diferencia que en el plano formal pasa casi desapercibido, en los restantes mundos puede significar un salto considerable.

Al mundo de la axiomática formal, al territorio donde habitan las definiciones implícitas por un sistema de axiomas y de las pruebas obtenidas por deducciones que se restringen a ellas se accede por una combinación de medios que residen en los dos restantes mundos. La concepción de la suma como el resultado de una operación es luego sustituida por una concepción más funcional, que permite ver el símbolo '+' como una función que se aplica sobre un par de números para producir un tercero, esto que podría resaltarse con una notación que no oculte el carácter funcional de la suma, como podría ser $+ (4, 3) = 7$, en lugar de $4 + 3 = 7$. En esta situación se ha logrado encapsular el proceso como un concepto. En la matemática elemental la situación anterior suele presentarse mostrando que el número de elementos del conjunto que resulta de unir uno con tres elementos y otro con cuatro elementos, es siete. En el mundo formal, la abstracción despega estos aspectos para crear una función que podrá por comodidad y economía de notación seguir llamándose suma, designada también con el signo '+', pero ahora definida en un conjunto cualquiera A (ya no necesariamente de números), una función que asigne a cada par de elementos de A un tercer elemento del mismo A, esto es $+: A \times A \rightarrow A$ y que satisfaga un conjunto de requisitos previamente escogidos (los axiomas). Según qué juego de axiomas se exija, la estructura así definida del conjunto junto con su ley suma, esto es el par ordenado $(A, +)$, recibirá diversos nombres (semigrupo, monoide, grupo…).

Figura 5. Esquema del pensamiento en los tres mundos de la matemática avanzada



Fuente: (Tall 2011, 23)

La Figura 5 resume el pasaje del pensamiento matemático a través de los tres mundos de la teoría. Es en el mundo formal donde residen las definiciones que abstraen propiedades para generar un espacio donde la validez de las deducciones se aplica a cualquier objeto que las satisfaga. Estas definiciones son tratadas en la siguiente sección.

2.3. La definición en el Pensamiento Matemático Avanzado

Otro de los componentes que consolida la demarcación entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado es el tratamiento que reciben los objetos de estudio, sobre todo cuando se trata de objetos compartidos. En el EMT los objetos son caracterizados por lo que se denominan ‘especificaciones’, una suerte de descripción por sus rasgos más notables, mientras que en el AMT los objetos son definidos, y sus propiedades se construyen a partir de las definiciones (Azcárate Giménez y Camacho Machín 2003, Tall 1988). La validez de la suposición tácita de muchos libros de texto de que las definiciones son suficientes para generar un aprendizaje de aquellos conceptos que se definen, y que esas definiciones son consultadas por los estudiantes en los ejercicios que esos textos les proponen, ha sido sometida a cuestionamientos por los teóricos del AMT. “Un rápido vistazo a la mayoría de los libros de texto universitarios mostrará el peso de las definiciones en la presentación del material del curso [...] sería necesario considerar no sólo cómo se espera que los alumnos adquieran sus conocimientos sino también, y principalmente, el modo en que efectivamente pueden hacerlo” (Vinner 1991, 65). Sin embargo, se ha observado que “desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones" (Azcárate Giménez y Camacho Machín 2003, 141). El segmento de prosa matemática que se denomina 'definición' es examinado en profundidad por los teóricos del AMT, para establecer el tipo de demanda cognitiva que exige una dada actividad propuesta como ejercicio y que necesita para su resolución de una definición: "Debemos definir una definición, [ya que] las definiciones dadas por el diccionario son del todo insatisfactorias como descripciones de las definiciones utilizadas en matemática avanzada" (Bagchi y Wells 1998b, 119). La naturaleza de la definición, su estructura misma, ha recibido la atención ya desde Aristóteles (Aristóteles 1967d, 311-316) en términos de género y especie, lo que hoy se traduciría al lenguaje de clases y subclases.

La definición genera serios problemas a los estudiantes, ya que es un elemento que representa de modo paradigmático el conflicto entre la estructura de la matemática como la conciben los matemáticos profesionales ya formados y los procesos cognitivos de los alumnos que intentan alcanzar una formación en matemática. Para los primeros, se trata de una ciencia deductiva que obtiene sus resultados a partir de axiomas y nociones básicas, con un cuerpo de proposiciones y teoremas derivados exclusivamente a partir de aquellos axiomas escogidos inicialmente mediante reglas de inferencia, "sin condescender a derivar argumentos de las cosas que ve a su alrededor" (Russell 1988, 168) Sin embargo, para los estudiantes el orden en que las cosas suceden no es el del lógico, sino el del desarrollo del conocimiento, que siempre ha viajado en el sentido opuesto. Así, por ejemplo, muchos de los resultados de la geometría surgieron mucho antes de que pudiera sospecharse una axiomática que los sustentara, de modo que "la prioridad lógica de los axiomas con respecto a los teoremas no es idéntica a la prioridad temporal de nuestra comprensión, el orden temporal en el cual adquirimos nuestro saber no es, en general, el mismo que el orden lógico de las proposiciones que constituyen ese saber" (Vinner 1991, 65). Esta inversión de sentidos, sin embargo, no suele ser reconocida en los libros de texto y revistas de matemática avanzada; por el contrario, muchos de ellos se basan implícitamente en las siguientes hipótesis (Vinner 1991, 65):

(a) Los conceptos se adquieren principalmente a través de sus definiciones.

(b) Los estudiantes usarán las definiciones para resolver los problemas y probar los teoremas tanto como resulte necesario desde el punto de vista lógico.

(c) Las definiciones deberían ser mínimas, significando con esto que no debieran tener partes que pudiesen ser lógicamente innecesarias.

(d) Es deseable que las definiciones sean elegantes, entendiendo por ello una cierta concisión o laconismo en la expresión.

(e) Las definiciones son arbitrarias.

Las definiciones, efectivamente, son arbitrarias, mas lo que quiere decir este punto es que es indiferente elegir una u otra forma de presentar una misma definición. Dicho en un lenguaje más técnico "una clase y una característica definitoria de ella son prácticamente intercambiables para muchos fines. La diferencia fundamental entre ambas reside en el hecho de que sólo hay una clase integrada por un conjunto de miembros, pero siempre existen muchas características distintas que permiten definir una clase dada" (Russell 1988, 21). Puesto en lenguaje más conciso, más de una intensión se corresponde con una dada extensión. Una definición nominal puede ser entendida como "una declaración en la que un cierto símbolo –o combinación de símbolos– introducido como nuevo significa lo mismo que otra combinación de símbolos cuyo significado ya se conoce. O bien, si la combinación de símbolos que se define es tal que sólo adquiere significación cuando se combinan con otros símbolos de una manera determinada (Whithehead y Russell 1981a, 64). La definición no toca aquella cosa que está definiendo, no se relaciona con los objetos definidos, sino que sucede, afirman los mismos autores, en el plano del lenguaje: "La definición misma no es, estrictamente hablando, parte de la cuestión en la que interviene; una definición tiene una relación total con los símbolos, pero no con lo que ellos simbolizan" (65). Es importante señalar que "una definición nominal es una convención, una resolución y no algo que pueda ser verdadero o falso [...] pone de manifiesto los caracteres principales o la estructura de un concepto [...] para posibilitar la exploración sistemática del objeto de estudio con el que se relaciona" (Cohen y Nagel 2000b, 51). Lo que es definido recibe el nombre de *definiendum*, mientras que le conjunto de símbolos que actúa de 'explicación' se llama *definiens* y el modo en que se presentan las definiciones nominales es semejante al que se utiliza en un diccionario corriente: a la izquierda el *definiendum*, a la derecha el *definiens*. Para destacar que se está efectuando una definición los autores utilizan distintas convenciones con mayor o menor precisión. En los Principia Mathematica, se utiliza como separador del *definiendum* y el *definiens* un signo '=' separado por puntos y con el marcador 'Df.' a la derecha del *definiens* para señalar el final de la definición, esto es que tiene la estructura siguiente:

definiendum .=. *definiens* Df.

Con ser esta notación muy precisa, no es de manera alguna generalizada; por el contrario, algunos autores de libros de texto establecen definiciones nominales insertadas con una breve locución (‘llámese’, ‘se llama’, ‘llamamos’, ‘decimos que’, ‘designamos como’, $\stackrel{def}{=}$...) en el seno de un párrafo propio del lenguaje coloquial, resultando entonces que el segmento de prosa matemática queda compuesto por dos registros: el matemático (la definición) y el no matemático (el texto donde la definición se inscribe). Esta entrada y salida ‘sin aviso’ de un registro a otro no genera ninguna disonancia al lector experto, pero podría pasar desapercibida al aprendiz. Las definiciones no sólo pueden estar embebidas en el texto corriente de un libro, sino que también pueden a su vez, estar incluidas en el texto de un párrafo que el autor señala como ‘ejercicio’. Sea, por ejemplo, lo que sucede con el siguiente ejercicio propuesto en uno de los libros de texto cuyo contenido se analiza en este capítulo (Hoffman y Kunze 1990, 287, §8.2. Ejercicio 10), cuyo enunciado es reproducido con la misma tipografía del original en la Figura 6.

Figura 6. Definiciones embebidas en el texto, reproducción de un fragmento de libro de texto de Álgebra Lineal

10. Sea V el espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ sobre C, con el producto interno $(A|B) = \operatorname{tr}(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de matrices diagonales.

Fuente: Hoffman y Kunze (1990, 287)

El ejercicio presenta dos definiciones nominales; la primera para designar con el símbolo V al espacio vectorial de las matrices cuadradas con cuerpo complejo, con el sobrentendido habitual respecto de las leyes de composición interna suma de matrices y la ley de composición externa producto por un escalar corrientes (y oportunamente *definidas* a su vez en la sección § 8.2 del libro). La segunda definición introduce el producto interno simbolizado con (A|B) a través de la traza (tr) del producto (ahora matricial) de la matriz A por la traspuesta conjugada de la matriz B que se designa como B* (lo que es en sí mismo una definición anidada). Si se utilizara una notación de definición explícita, como la propuesta por Russell, el mismo ejercicio se vería del siguiente modo:

Sean V y (A|B) dados por las siguientes definiciones el espacio vectorial y el producto interno dado por las siguientes definiciones:

(a) V.=.(Cn x n, +, (C, +, .), .). Df.

(b1) B*.=. $\bar{B}^T$. Df.

(b2) (A|B).=. tr(AB*). Df.

Hallar el complemento ortogonal del subespacio de matrices diagonales.

La presentación del ejercicio con las definiciones ocupando su lugar específico para destacarlas del resto del enunciado, puede resultar bastante más extensa que la reproducida en la Figura 6. A un lector advertido, no le resultará difícil identificar de un vistazo las diferentes funciones desempeñadas por los segmentos textuales, aunque se hallen implícitamente escritas. También puede verse el ejemplo seleccionado en perspectiva 'hacia atrás': si se procediera a reescribirlo retrocediendo con la explicitación de las definiciones que se han ido construyendo de forma anidada, llevaría al menos unas cuatro páginas. Este es otro de los aspectos de lo que se entiende por *compresión* de la información por lo que las definiciones han sido consideradas también desde esta perspectiva de la compresión de la información: "Utilizando un símbolo nuevo y simple en lugar de un grupo de viejos símbolos familiares economizamos espacio, tiempo y atención o energía mental" (Cohen y Nagel 2000b, 48).

Observando el anterior ejemplo puede resultar claro que, si bien, teóricamente no existe necesidad de postular una definición nominal (ya que siempre sería posible sustituir el *definiens* por el *definiendum*), en la práctica, los enunciados más simples pronto resultarían de una magnitud que las tornarían inmanejables. Además, estos enunciados proporcionan implícitamente una información no contenida en los términos, ya que indican que el *definiens* es un conjunto de hechos que ha merecido llegar a tener un nombre, y, por lo tanto, puede verse una colección de definiciones como un resumen de lo que en la teoría se ha considerado de importancia para el objeto en estudio: "Por estas razones se encontrará que las definiciones constituyen lo más importante y lo que más merece la atención del lector" (Whithehead y Russell 1981b, 65).

Se adopta como definición de 'definición' la presentada por dos teóricos de las variedades de prosa matemática (Bagchi y Wells 1998b, 120) "Una definición prescribe el significado de una palabra o frase en términos de otras palabras o frases que han sido previamente definidas o cuyo significado se asume […] las definiciones se distinguen muy sutilmente de otras clases de discurso en el registro matemático". Los mismos autores diferencian 'definición' y 'especificación', anotando que en ocasiones los libros de texto–con mayor frecuencia los de nivel elemental– describen el tipo de objetos que se pretende definir evitando una definición formal en el sentido dado anteriormente, ya por considerarlo pedagógicamente inconveniente, ya por la extrema dificultad técnica que introduciría. En tal situación, se acude a una especificación, definida como una descripción de un tipo de objetos matemáticos que presenta los rasgos destacados de tales objetos, pero que podría dejar incompleta la lista íntegra de características que los define por completo. En un lenguaje más conciso, la especificación es una aproximación a la intensión de un objeto, sin pretensión de completarla toda.

No son las especificaciones, sino las definiciones formales, cuya presencia es inevitable en los libros de texto de matemática avanzada, las que producen un salto cualitativo al ingreso de este nivel. Esta condición crearía una dificultad en el lector que conviene reconocer y explicitar: "las definiciones formales y teoremas del análisis requieren cualidades cognitivas sutilmente diferentes que las convierten en casi inadecuadas para un primer curso de Cálculo" (Tall 1997a, 294). Si las definiciones formales son inevitables, la declaración de Tall indicaría una contradicción insoluble en los textos de Cálculo, a menos que esa definición sea introducida con algún recorrido por el *embodiment world*; en otros términos habría "un defecto esencial en los cursos de cálculo construidos sobre definiciones y teoremas desde el comienzo" (295).

El marco conceptual así construido proporciona las dimensiones de análisis para identificar los tipos de abstracción que se presentan en nociones centrales del Cálculo.

3. Materiales y métodos

Las carreras de ingeniería en la Argentina se organizan de modo que los contenidos que se consideran básicos de la matemática se presentan en los primeros años, con asignaturas que podrían dividirse de modo muy grueso según sus fundamentos, en Cálculo, Álgebra, Variable Compleja. Esta disposición es también propia de las carreras de ingeniería en América y Europa occidental.

En esta sección se presenta el material sobre el que se relevan las categorías de la abstracción tal como han sido caracterizadas en el apartado anterior: los conceptos matemáticos, por un lado, y los libros de texto que los presentan, por el otro. Los conceptos se toman entre los fundamentales de la asignatura, mientras que los libros de texto entre los principalmente citados por las universidades de la Argentina, y las universidades extranjeras del mundo occidental de mayor importancia según los llamados Criterios Objetivos Bibliométricos por organismos internacionales.

3.1. La población de conceptos

El Cálculo en el nivel básico de ingeniería es un nombre genérico que cubre funciones de una o varias variables reales y de una variable compleja, que usualmente se presenta con distintos nombres según la distribución de asignaturas que realizan las instituciones. Así, son usuales denominaciones como Análisis Matemático I, II, III, IV, Cálculo Vectorial, Variable Compleja. La variable real y compleja raramente tienen una tratamiento unificado, que solo suele darse en textos de niveles más elevados; un único ejemplo puede contabilizarse en el medio local, el libro de texto Principios de Análisis Matemático (Rudin 1987). En cuanto al Álgebra, superado un curso de rudimentos que en estos niveles suele incluir la geometría euclídea elemental, por lo general trata de estructuras lineales y se presenta genéricamente como Álgebra Lineal. Los cursos de Cálculo, por otra parte, solo excepcionalmente se presentan con la abstracción de las Variedades Diferenciables, pudiéndose citar en este sentido el texto Cálculo de Variedades (Spivak 1988).

Los conceptos centrales que se estudian en cada una de esas tres grandes áreas son listados en la matriz de población de conceptos. El nivel de desagregación con el que son aquí tomadas esas nociones es el que permite concentrarse en la definición de la noción sin descender a los detalles. En los programas analíticos de las universidades, este nivel suele ser el de un título o subtítulo de capítulo, estructura que es seguida de cerca por los libros de texto. No se incluye el tema de las ecuaciones diferenciales, cuya profundidad es muy variable según que forme un curso independiente o se distribuya en los cursos de Cálculo y Álgebra.

Los conceptos centrales, agrupados en un dominio que en adelante se denomina D, se constituyen como los elementos de la unión de los subconjuntos D_1, D_2, D_3, esto es que $D \stackrel{def}{=} D_1 \cup D_2 \cup D_3$ donde D_1 es el conjunto de nociones de Cálculo en el campo real (tanto de funciones escalares o vectoriales), D_2 de Cálculo en el campo complejo, D_3 de Álgebra Lineal. Los subtemas tratados en cada uno de estos conceptos no se detallan, y a los efectos del tratamiento de su abstracción se tomará el núcleo del concepto comprimido en la definición o en la afirmación de una proposición.

La abstracción requerida por las nociones que integran los subconjuntos D_2 y D_3, en cualquiera de las categorías que quiera considerarse, se concibe en la comunidad académica como de mayor nivel que la correspondiente a las nociones que constituyen el subconjunto D_1. De esta manera, el estudio efectuado sobre la población D_1 produce resultados, en lo concerniente a la abstracción, que sirven de por lo menos cota inferior de los que se obtendrían sobre $D_2 \cup D_3$. La población en este estudio, entonces, está compuesta por los conceptos centrales del área del Cálculo en Variable Real.

Matriz 1. La población de conceptos. En la segunda columna de la fila k-ésima se encuentra el conjunto de conceptos centrales del dominio k-ésimo indicado en la primera columna de esa fila

Dom	Título que describe el concepto residente en el dominio Dom.
D_1	Conjuntos. Números reales. El concepto de función. Sucesiones. Series. Convergencia. Límite. Continuidad de funciones escalares. Derivadas. Diferenciabilidad y composición de funciones escalares. Aproximación lineal. Aproximación polinómica. Extremos de funciones escalares. Primitiva. Integral definida. Geometría en espacios n-dimensionales. Campos escalares y vectoriales. Límite y continuidad de campos. Derivabilidad de campos escalares y vectoriales. Extremos. Curvas. Superficies y Variedades. Integrales múltiples. Integrales sobre curvas. Integrales sobre superficies. Teoremas integrales.
D_2	Números complejos. Funciones analíticas. Integración en el campo complejo. Series de Taylor y Laurent. Singularidades. Prolongación analítica. Residuos. Transformación conforme. Problemas de contorno. Transformadas de Laplace y Fourier. Series de Fourier.
D_3	Sistemas lineales. Matrices. Espacios vectoriales. Transformaciones lineales. Diagonalización de operadores. Espacios con producto interno. Ortogonalidad. Proyecciones. Distancia. Espacios normados y métricos. Operadores hermíticos. Formas cuadráticas. Desigualdades matriciales. Normas matriciales.

Fuente: elaboración propia

3.2. Muestra de conceptos

Sobre la población D_1 (un total de 28 conceptos) se aplica un filtro aleatorio F_1 para obtener la muestra M, de esta manera puede escribirse que $M = F_1 (D_1)$. Tomando una muestra aleatoria[12] de 12 elementos, suficientes para cubrir la heterogeneidad de los tipos básicos de abstracción caracterizados en el entorno conceptual de la sección 2 de este capítulo; en términos de Galtung (1978, 52), se trata de una muestra que satisface el requisito de representatividad multivariable sobre las dimensiones de abstracción y de los mundos de la matemática presentados en el marco teórico. El resultado del filtro aleatorio es la matriz de conceptos $MC = F_1 (D_1)$.

La posición de los elementos de la lista anterior en el espacio de los mundos y las cargas de abstracción que portan son propias de sus contenidos mismos; las diversas presentaciones que de ellos hacen los libros de texto no anula el núcleo relativamente consistente que hace al concepto mismo, condensado en la definición, que es sobre el que se hace el análisis mismo.

[12] La muestra se obtiene con el generador de números pseudoaleatorios provisto por la aplicación matlab, a través de la función *rand*, que atribuye a todos los elementos la misma probabilidad de ser elegidos.

Matriz 2. La matriz MC de doce conceptos, seleccionada aleatoriamente de la población de veintiocho nociones mediante una distribución uniforme de probabilidad

Id.	Concepto
C1	El concepto de función
C2	Límite de funciones y campos escalares
C3	Continuidad de funciones en espacios métricos
C4	Derivada de funciones escalares
C5	Primitivas e integrales definidas
C6	Nociones elementales de topología en espacios n-dimensionales
C7	Derivadas parciales de campos escalares
C8	Extremos de funciones y campos escalares
C9	Curvas
C10	Superficies y variedades
C11	Integrales múltiples
C12	Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

Fuente: elaboración propia

De esta manera, la elección del soporte material sobre el que se asientan estas nociones, no tiene incidencia decisiva en la naturaleza del contenido presentado. Esto permitiría tanto escoger un texto cualquiera para recoger de allí el concepto a analizar, como variar el texto a medida que se recorren las distintas nociones, siempre que esos textos fuesen razonablemente 'equivalentes', en el sentido de ajustarse a los cánones de la disciplina. Se ha optado por esta segunda opción, incluyendo reconocidos textos clásicos citados en el campo disciplinar. Cuando se ha creído conveniente, para mejor ubicar las coordenadas de la noción en el espacio de los mundos y las abstracciones delineado en el marco teórico, se ha incluido más de un texto en la presentación de una misma noción.

3.3. Población y muestra de libros de texto

La población de textos queda definida curricularmente, a través del relevamiento de bibliografía de las universidades que ofrecen carreras de ingeniería en la Argentina (estatales o privadas) y de las universidades del extranjero que encabezan dos reconocidas clasificaciones actualizadas al mes de enero de 2013: el ranking de alcance europeo del Laboratorio de Cibermetría del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC www.webometrics.info/es/Ranking_Europe) de España, y el ranking mundial por especialidades (QS World University Rankings 2013, www.topuniversities.com), ambos confeccionados con los llamados Criterios Objetivos Bibliométricos (en el apartado 4.1 del Anexo se detallan sus dimensiones). Se toman las primeras diez universidades europeas y las primeras diez a nivel mundial (el listado se detalla en el apartado 4.2 del Anexo); Conviene mencionar que la mayoría de los textos de uso local son versiones castellanas de los textos utilizados en las universidades extranjeras. De esa manera queda definida la población de textos sobre los que se releva la abstracción, conjunto TA constituido por 56 textos.

Se extrae una muestra aleatoria de 28 textos (la mitad de los textos que constituye la población) para lo que se establece entre los textos una distribución discreta tal que cada texto que pertenece a una bibliografía de la Argentina tenga el doble de probabilidad de ser elegido que aquellos solamente utilizados en universidades extranjera. El criterio de ponderar los textos locales pretende asegurar que los resultados obtenidos les son especialmente aplicables. El sorteo se hace mediante un generador de números pseudoaleatorios cargado con tal distribución, del que resulta la matriz muestral de textos MT = F_2 (TA), donde F_2 es el filtro aleatorio aplicado sobre la población TA.

La matriz resultante de este proceso consta de diecisiete textos locales y los restantes once extranjeros en los siguientes idiomas: un texto en alemán (Zorich 2004), un texto en portugués (Simmons 2011), dos textos en francés (Postnikov 1988, Avez 1987), cuatro en italiano (Abate y Tovena 2011, Canuto y Tabacco 2005, Giusti 1996, Leonesi y Toffalori 2006), y cuatro en inglés (Aman y Escher 2008, Colley 2012, Ghorphade y Limaye 2006, Strang 2009). Las universidades listadas en los rankings quedan todas representadas por al menos un ejemplar de su bibliografía, con la excepción de la Norwegian University; Por ejemplo, el texto de George Simmons, *Cálculo com Geometria Analítica*, que es una versión portuguesa del original en inglés del autor, está presente en la bibliografía de la Universidade do Porto. La matriz se presenta en la página siguiente, con un sombreado sobre las filas que contienen textos no locales.

Matriz 3. Matriz muestral MT de 28 textos, seleccionados aleatoriamente con una distribución no uniforme de probabilidad. Las filas sombreadas indican los textos no citados en la Argentina

Id.	El libro de texto seleccionado
TA1	Abate, Marco, y Francesca Tovena. Geometria Differenziale. Primera edición. Milan: Springer, 2011.
TA2	Aman, Herbert, y Joachim Escher. Analysis II. Primera Edición. Traducido por Silvio Levy y Matthew Cargo. Berlín: Birkhäuser, 2008.
TA3	Anton, Howard, Irl Bivens, y Stephen Davis. Calculus. Early Trascendentals. 10th Edition. Décima Edición. New York: Wiley and Sons, 2012.
TA4	Apostol, Tom. Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra. Segunda edición. Vol. I. 2 vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

TA5	Apostol, Tom. Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. Segunda edición en castellano Traducido por Francisco Vélez Cantarell. Vol. II. 2 vols. Barcelona: Reverté, 1980.
TA6	Avez, Aubre. Calcul Différentiel. Collection Maîtrise de mathématiques pures sous la direction de Dieudonné et Malliavin. Paris: Masson, 1987.
TA7	Canuto, Claudio, y Anita Tabacco. Analisi matematica II. Teoria ed esercizi con complementi in rete. 2a edizione. Segunda edición. Milano: Springer, 2005.
TA8	Colley, Susan. Vector Calculus. Fourth Edition. Cuarta edición. Boston: Pearson, 2012.
TA09	Courant, Richard, y Fritz John. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 2. Novena edición. Traducido por Hernán Pérez Castellanos. Vol. II. 2 vols. México D. F.: Limusa, 1999b.
TA10	Courant, Richard, y Fritz John. Introduction at Calculus and Analysis. Volume two. Primera edición. Vol. II. 2 vols. New York: Wiley & Sons, 1974.
TA11	Ghorphade, Sudhir, y Balmohan Limaye. A Course of Calculus and Analysis Real. With 71 figures. Primera edicón. New York: Springer, 2006.
TA12	Giusti, Enrico. Analisi Matematica 1. Segunda. Torino: Bollati Boringhieri, 1996.
TA13	Hairer, Ernst, y G. Wanner. Analysis by its History. Primera edición. New York: Spinger-Verlag, 1996.
TA14	Kudriávtsev, L. D. Curso de análisis matemático. Tomo II. Primera edición. Traducido por Vicente Fernández. Vol. II. 2 vols. Moscú: Mir, 1984.
TA15	Lang, Serge. A First Course of Calculus. Tercera. New York: Springer, 1984.
TA16	Leonesi, Sandro, y Claudio Toffalori. Un invitto all'Algebra. Primera edición. Milano: Springer, 2006.
TA17	Marsden, Jerrold E., y Anthony J. Tromba. Cálculo Vectorial. Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
TA18	Marsden, Jerrold, y Anthony Tromba. Vector Calculus. Quinta edición. New York: Freeman and Company, 2003.
TA19	Pita Ruiz, Claudio. Cálculo Vectorial. Primera edición. Naucalpán de Juárez: Prentice Hall Hispanoamericana, 1995.
TA20	Postnikov, M. Leçons de géométrie. Algèbre linéaire et géométrie différentielle. Primera edición en francés, primera reimpresión. Traducido por Irina Pétrova. Moscú: Mir, 1988.
TA21	Rabuffetti, Hebe. Introducción al análisis matemático. (Cálculo 2). Cuarta edición. Buenos Aires: El Ateneo, 1991.
TA22	Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones. Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.
TA23	Santaló, Luis. Vectores y tensores con sus aplicaciones. Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.
TA24	Simmons, George. Cálculo com Geometria Analítica. Segunda. San Pablo: McGraw-Hill, 2011.
TA25	Spivak, Michael. Cálculo en Variedades. Segunda Edición. Traducido por Griselda Pascual Xufré. Barcelona: Reverté, 1988.
TA26	Spivak, Michael. Calculus. Tercera Edición. Houston: Perish, 1994.
TA27	Strang, Gilbert. Calculus. Sexta edición. Massachussets: Wellesely-Cambridge Press, 2009
TA28	Zorich, Valdimir. Analysis I. Segunda edición. Heidelberg: Springer, 2004.

Fuente: elaboración propia

3.4. La matriz muestral Texto-Concepto

Los conceptos listados en MC son analizados por algunos textos de MT: la asignación de cuántos y cuáles se hace mediante la generación de una función de tres variables aleatorias. La primera es una permutación pseudoaleatoria de las identificaciones de los conceptos, la segunda es una variable que indica cuántos textos se analizan (con un mínimo de 2 y un máximo de 5), la tercera identifica cuáles son esos textos cuantificados por la segunda variable[13]. De ese filtro aleatorio F_3 resulta la matriz Texto-Concepto, esto es MTC = F_3 (MT × MC), definida como MTC (k, q) $\stackrel{\text{def}}{=}$ 1 si el el concepto C_q se analiza en el texto TA_k, 0 en todo otro caso.

Matriz 4. Matriz muestral Texto-Concepto MTC. Si el concepto C_q es analizado en el texto TA_k, la celda (k, q) lleva un 1 con fondo negro. Es el resultado del filtro aleatorio bidimensional con distribución uniforme de probabilidad sobre los textos y los conceptos

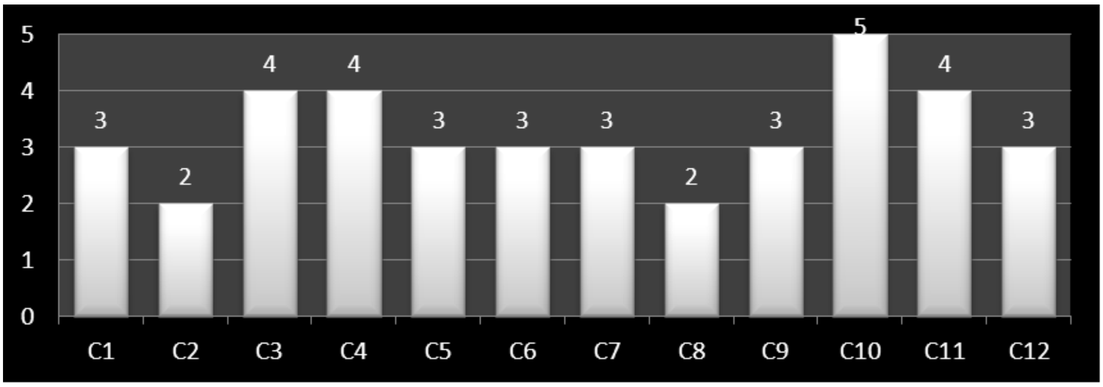
Id.	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
TA1										1		
TA2										1		
TA3				1								
TA4				1								
TA5			1	1					1			1
TA6								1				
TA7											1	
TA8											1	
TA09							1					
TA10							1					
TA11	1											
TA12		1										
TA13			1		1				1			
TA14								1				
TA15					1							
TA16	1											
TA17						1					1	1
TA18						1					1	
TA19		1								1		
TA20									1			
TA21						1						
TA22			1				1					
TA23										1		1
TA24				1								
TA25										1		
TA26					1							
TA27	1											
TA28			1									

Fuente: elaboración propia

La densidad del análisis de los conceptos se mide por una lectura de la matriz MTC a lo largo de las columnas: por ejemplo, el concepto C5 es relevado en tres textos, que llevan la identificación TA13, TA15, TA26, como se observa recorriendo la quinta columna de la matriz. Un gráfico que resume esta densidad se presenta en la Figura 7.

[13] Utilizando el software matlab(r) basta la línea for i =1:12, k=max(2,ceil(5*rand)); columna= ceil(28*rand(1,k)), end para la generación de la segunda y tercera variables, mientras que p = randperm(12) para la primera.

Figura 7. La cantidad de textos sobre el que se releva el concepto C

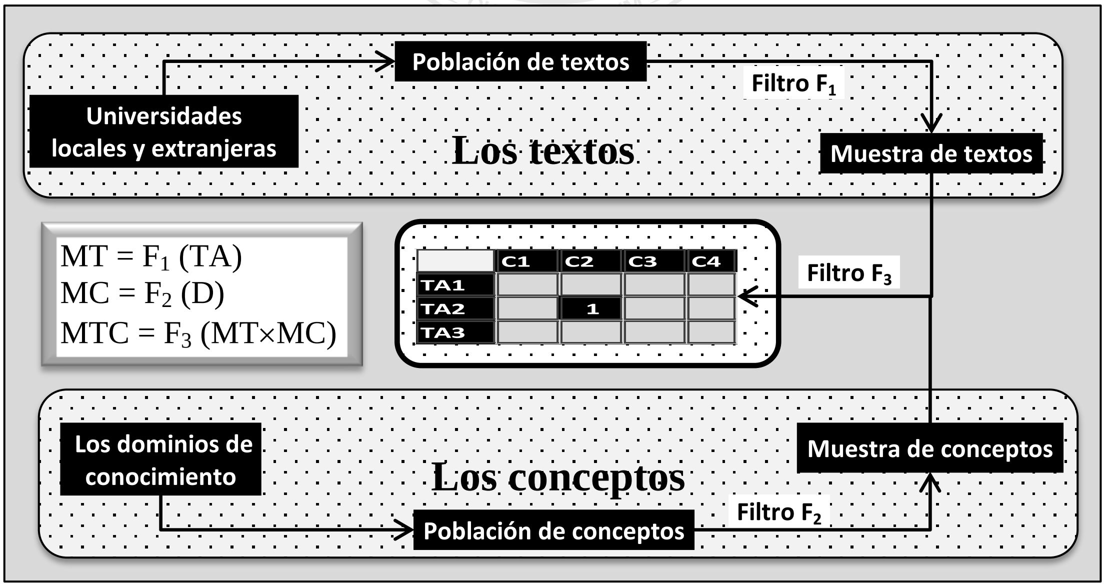


Fuente: elaboración propia

3.5. Estructura lógica de materiales y métodos

La lógica secuencial de la construcción del material puede resumirse diciendo que deriva de la confluencia de dos canales: uno resulta de recoger de las bibliografías de las universidades la población de textos y filtrarlos; el otro, de hacer lo propio con los dominios de conocimientos. El material así recogido es entonces apareado para confluir en la matriz final, tal como se ilustra en la Figura 8.

Figura 8. Secuencia completa de organización de materiales y métodos



Fuente: elaboración propia

Sobre la matriz así obtenida, y con las categorías de lectura establecidas en el entorno conceptual se aplican las técnicas propias del análisis de contenido a las unidades de análisis de cada celda (Krippendorff 1990, Leray 2008, Neuendorf 2012, R. Weber 2012) para producir y discutir los resultados que se presentan en la siguiente sección.

4. Resultados y discusión

Los ejes principales en los que tiene lugar la discusión de la naturaleza y nivel de la abstracción, presentados en el apartado 1, y el particular recorte teórico adoptado en el apartado 2, son aplicados a los materiales definidos en la sección anterior con los métodos allí descritos produciendo los resultados que se presentan y discuten en esta sección, que está organizada en una lectura de la matriz Texto-Concepto a lo largo de las columnas de conceptos.

4.1. Función

El texto *A Course of Calculus and Analysis Real* (Ghorphade y Limaye 2006, 14) define formalmente el concepto de función en el habitual lenguaje amplio de conjuntos, que permite indistintamente referirse a funciones entre cualquier par de conjuntos (reales o complejos, escalares o vectoriales, numéricos o abstractos), pero, del mismo modo que el autor del texto anterior, indica que “El concepto de función es de una importancia básica en el cálculo y el análisis real. En esta sección comenzaremos con una descripción informal de este concepto seguida de una precisa definición” (Ghorphade y Limaye 2006, 13). Además de una valoración del peso del tópico en la disciplina, el autor anuncia su intención de separar las aproximaciones (que yacen en el mundo incorporado) al concepto por diversas vías –fundamentalmente gráficas– de la definición misma.

Figura 9. La definición de función en *A Course of Calculus and Analysis Real*

Let D and E be any sets. We denote by $D \times E$ the set of all ordered pairs (x, y) where x varies over elements of D and y varies over elements of E. A **function** from D to E is a subset f of $D \times E$ with the property that for each $x \in D$, there is a unique $y \in E$ such that $(x, y) \in f$. The set D is called the **domain** or the **source** of f and E the **codomain** or the **target** of f.

Fuente: Ghorphade y Limaye (2006, 14)

El autor define función del siguiente modo: “Dados dos conjuntos D y E, denotemos DxE el conjunto de los pares ordenados (x, y) con x en D e y en E. Una función de D en E es un subconjunto *f* de DxE con la propiedad que para x en D hay un único y en E tal que (x, y) pertenece a *f*” (Ghorphade y Limaye 2006, 14), y cuyo original con su tipografía se muestra en la Figura 9.

La función es otro ejemplo de un procepto, con la conjugación de un proceso que es comprimido en la definición formal del concepto. La idea básica que procura captar la reacción experimentada por una variable cuando se hace variar otra, o en palabras de Tall “un propósito de la función es representar cómo cambian las cosas” (Tall 1997a, 289), no queda expresada en la definición, que solo capta la exigencia formal de unicidad de la segunda componente –para cada una de las primeras– de la relación binaria, como requisito para ser aceptada como función. El aspecto de proceso inherente a la función es referido por el autor en los párrafos que siguen a su definición, con notaciones más sugerentes de la acción, tales como $x \to f(x)$ o también f: D $\to$ E. Si bien la definición es dada con una amplitud que permite cualquier par de conjuntos, el texto prosigue restringido las funciones escalares. El tipo de abstracción se mantiene en el nivel proceptual, y la dualidad simbólica se explota en el Cálculo utilizando el símbolo f para el objeto función (esto es la terna D, E, f), y también (impropiamente) $f(x)$.

Figura 10. La definición de función en *Un invitto all'Algebra* (Leonesi y Toffalori 2006, 12)

Definizione 1.5.1 Si dice *funzione* o *applicazione* di A in B una relazione f di $A \times B$ tale che,

$$\forall a \in A, \text{ esiste uno e un solo } b \in B \text{ per cui } afb.$$

Fuente: Leonesi y Toffalori (2006, 12)

Una vez que la definición de función ha ingresado de lleno en el mundo formal, hasta llega a perder el enfoque que podría esperarse debido al contexto del área temática en el que reside. Una prueba de ello es la comparación de las definiciones entre un texto de Cálculo, como el precedente, y la que puede leerse en el texto *Un invitto all'Algebra* que lo expresa de este modo: “se llama función o aplicación de A en B a una relación f en AxB tal que para todo a en A existe solamente un elemento b en B tal que el par (a, b) pertenece a f” (Leonesi y Toffalori 2006, 12). La Figura 11 muestra los recursos tipográficos utilizados en el texto original. Tras la formalización ya no queda rastro alguno de conexiones intuitivas que permitan aplicar el calificativo de ‘razonable’ a la definición adoptada, esto es, alguna pista de por qué puede resultar conveniente separar del universo de la relaciones, aquellas que cumplen la condición adicional del último párrafo; el concepto presentado en el mundo incorporado como un modelo de regla de conversión de señales de entrada en respuestas de salida a través de la función, permite traducir la exigencia de la definición en no permitir que a un dado estímulo no se siga ninguna respuesta (o se sigan más de una respuesta). Desde luego, ya es evidente que la posibilidad de leer de modo significativo la definición requiere que uno de los conceptos allí mencionados –el de relación– ya haya sido encapsulado por el lector entre sus conocimientos previos después que los autores los presentaran previamente en la definición correspondiente reproducida en la Figura 11 [Sean los conjuntos A y B. Se llama *relación* de A en B a un subconjunto de A × B].

Figura 11. La definición de relación en *Un invitto all'Algebra*

1.4 Relazioni

Definizione 1.4.1 Siano A, B insiemi. Si chiama *relazione* di A e B un sottoinsieme R di $A \times B$.

Fuente: Leonesi y Toffalori (2006, 11)

Gilbert Strang, profesor del MIT de prestigio internacional, elige una introducción al concepto de función que se aprovecha plenamente del mundo de las percepciones, comenzando por hablar informalmente de la velocidad para luego escribir que "este ejemplo nos familiariza con una idea crucialmente importante: el concepto de una "*función*". Aprovechamos esta magnífica oportunidad para explicar funciones: *El número v*(*t*) *es el valor de la función v en el instante t*. El tiempo *t* es la *entrada* a la función. La velocidad *v*(*t*) en el instante *t* es la *salida*" (Strang 2009, 4). La tipografía en la lengua original se muestra en la Figura 12.

Figura 12. Introducción intuitiva del concepto de función en el texto *Calculus*

This forward-back example gives practice with a crucially important idea—the concept of a "***function***." We seize this golden opportunity to explain functions:

The number $v(t)$ is the value of the function v at the time t.

The time t is the ***input*** to the function. The velocity $v(t)$ at that time is the ***output***.

Fuente: Strang (2009, 4)

En la presentación de Strang, la definición formal como pares ordenados tal como se viera en los otros dos autores se relegada a un segundo momento y en la categoría de una nota en el texto, pero la considera "demasiado pasiva" (Strang 2009, 5), esto es que en el momento de la presentación, está más interesado en el aspecto dinámico del proceso, que en el carácter estático del concepto, ya tomado como concepto listo para actuar como argumento de entrada a otros procesos.

4.2. Límite de funciones y campos escalares

El texto *Analisi Matematica I* (Giusti 1996) define formalmente el concepto de límite de una función en el lenguaje de entornos como sigue:

> La definición 4.1 puede ser reformulada en términos de entornos del modo siguiente: se tiene $\lim_{x \to xo} f \; x \; = l$ si para cualquier entorno I(*l*, ε) de *l* existe un entorno I(*x*o, δ) de *x*o tal que, para todo *x* ≠ xo, que pertenezca al conjunto intersección entre I(*x*o, δ) y el dominio A de *f*, se tenga que *f* (*x*) pertenezca al primer entorno I(*l*, ε). En otras palabras, la imagen a través de *f* del conjunto I(*x*o, δ) ∩ A −{*x*o} debe estar incluida en el entorno de *l*, I(*l*, ε) (Giusti 1996, 135).

La transcripción que respeta la tipografía y recursos simbólicos del texto en el idioma original se muestra en la Figura 13. Puede observarse, al finalizar el párrafo, que el autor ofrece al lector un texto alternativo al que escribe en primer lugar; la paráfrasis está escrita presuponiendo que el alumno conoce el significado de la notación *f* (A) cuando A se trata de un subconjunto no vacío del dominio de la función *f*. De esta manera, la definición puede ser leída según esta segunda opción que acorta el texto, al costo de aumentar la densidad de información comprimida en la definición. También se observa (primer renglón) que esta definición misma es una segunda versión de una definición previamente escrita, reformulada en otro lenguaje (el de los entornos), y que es a su vez una nueva forma de comprimir las relaciones entre los objetos que intervienen.

Figura 13. La definición de límite en el texto *Analisi Matematica I*

La definizione 4.1 può essere riformulata in termini di intorni nel modo seguente; *si ha* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se, per ogni intorno* $I(L, \epsilon)$ *di* L*, esiste un intorno* $I(x_0, \delta)$ *di* x_0 *tale che, per ogni* $x \in I(x_0, \delta) \cap A - \{x_0\}$,[4] *si abbia* $f(x) \in I(L, \epsilon)$ *(o, in altre parole, tale che* $f(I(x_0, \delta) \cap A - \{x_0\})$ *sia contenuto in* $I(L, \epsilon)$*).*

Fuente: Giusti (1996, 135)

La definición formal en este texto no es precedida por objetos visibles que puedan contribuir al concepto desde el mundo incorporado. Tampoco en el texto se siguen ejemplos que ayuden al lector con una intuición sensible. Sin embargo, el texto está organizado de modo que previamente (80 páginas atrás, capítulo 2) introduce la definición de límite de una sucesión numérica diciendo que “el concepto de límite de una sucesión es, bien mirado, la base de todo el análisis matemático. Con el propósito de aclararlo, examinamos previamente un cierto número de ejemplos” (Giusti 1996, 55).

Los ejemplos así presentados atienden a la dimensión de procesos consistentes en acciones sobre los símbolos, sin acudir a registros de objetos gráficos. De este modo, la abstracción que el concepto formal de límite implica no se alcanza aquí pasando por una aproximación en el mundo incorporado, ni la dualidad proceptual queda explicitada. La abstracción incluye una generalización solo si se supone que el lector ha seguido el texto en su integridad, y que además tiene en cuenta que las sucesiones son casos particulares de las funciones con dominios restringidos a un conjunto coordinables con los números naturales.

La elevada dificultad de la abstracción del concepto formal de límite ha sido señalada por los teóricos del AMT, entre otras cosas, por el anidamiento de los cuantificadores que intervienen en el épsilon-delta lenguaje: “existe suficiente evidencia que muestra que el concepto de límite formal tiene una gravosa dificultad como para ser utilizado como fundamento de la enseñanza del Cálculo (Tall, Smith y Piez 2008, 212). Las investigaciones prueban, además, que los estudiantes no solamente pueden imaginar el *proceso* de tender hacia un límite sino el *concepto* de lo arbitrariamente pequeño (pero no nulo) involucrado en la definición del texto como el cualquier entorno I (l, ε).

Para apreciar el grado de compresión al que son sometidos los conceptos que intervienen en la definición del límite puede desplegarse la secuencia de acciones y objetos según aparecen en la definición del texto reproducido. En esta descomposición genética (Tall, Smith y Piez 2008), la secuencia se presentaría de la siguiente manera:

(1) La acción de sucesivas evaluaciones de la función f en algunos puntos cada vez más próximos al punto x_0 del que se habla en la definición.

(2) Interiorizar las acciones emprendidas en el paso anterior como una coordinación entre dos aproximaciones, la del argumento de la función acercándose a x_0 con la de los valores de la función acercándose al valor del límite l, esto es la percepción de una correspondencia entre lo que simbólicamente puede escribirse como $x \to x_0$, con $f(x) \to l$.

(3) Encapsular el *proceso* del paso anterior, de manera que llegue a ser un objeto sobre el que a su vez se puedan ejercer acciones, como por ejemplo decidir si la proposición $[f(x) \to l] \Rightarrow [(f(x))^2 \to l^2]$ es válida.

(4) Reconstruir el proceso del paso (2) en el lenguaje de intervalos y desigualdades, lo que exige la definición de un intervalo que excluye su

centro a través del símbolo $0 < |x - x_0| < \delta$, y de otro que encierra la amplitud prefijada en las oscilaciones de las imágenes, que puede ser simbolizado por $|f(x) - l| < \varepsilon$, con la percepción que el segundo condiciona al primero.

(5) Aplicar un adecuado esquema de cuantificadores a los pasos precedentes de modo que resulte la definición formal de límite, que entonces debiera poder imaginarse como la cristalización de un proceso iterativo a través de todos los números positivos, y para cada uno de ellos (llamados ε), asegurar la existencia de todos los números positivos (denominados δ en la definición), y a su vez ara cada uno de ellos considerar los infinitos valores (llamados ahora x) que caen en cada uno de los intervalos determinados por los números δ, y verificando las correspondientes desigualdades a satisfacer por sus correspondientes imágenes a través de la función f.

(6) Pasar la definición del paso anterior al lenguaje de entornos, lo que exige contar ya con la definición de entorno con centro en un punto a de radio positivo r como el conjunto de puntos cuya distancia al centro a es menor que r, esto es $\mathrm{I}\,(a, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}\colon |x - a| < r\}$.

Los seis componentes precedentes que están comprimidos en la definición del texto de Giusti, no difieren, conceptualmente hablando, de los que se encuentra en cualquier otro texto. La compresión de la abstracción se concentra en la definición formal, y no se llega a ella sin un costo para el alumno que deberá reunir los distintos aspectos operativos en la secuencia (1)–(6), y en especial que el proceso resumido en la expresión “cuando x tiende a x_0, $f(x)$ tiende a l” pueda ser visto como dos procesos separados que son coordinados por la aplicación de f al primero para convertirlo en el segundo, que es lo básicamente captado por el concepto de límite.

La extensión del concepto de límite de una función escalar para ser aplicable a campos escalares, cuando se expresa en el lenguaje de entornos, no requiere de ninguna modificación sustancial a la ya presentada; en otras palabras, el lenguaje de entornos blinda la abstracción a los cambios de dimensión del dominio, como puede verse en el siguiente texto. La Figura 14, reproducción del texto *Cálculo Vectorial* (Pita Ruiz 1995, 132), además de la definición, reproduce el fragmento previo en el que el autor procura un acercamiento intuitivo que juzga como una manera muy importante –tal vez la más importante, a su juicio– de entender el concepto, utilizando expresiones del lenguaje coloquial como *vecina íntima* antes de comprimirlas en la definición formal, que separa del texto introductorio sangrando el párrafo completo. Ya en la misma definición formal, el autor no procede a una compresión total para presentarla en una forma mínima, sino que incluye en ella algún comentario pequeño que ayude al lector; tal es cometido del texto entre paréntesis en el penúltimo renglón (“por pequeño que sea”) que desde el punto de vista formal es del todo innecesario.

Figura 14. Presentación e introducción a la definición de límite para campos escalares del libro de texto *Cálculo Vectorial*

Lo que queremos, pues, es estudiar qué pasa con los valores de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ es una vecina "íntima" ($\mathbf{x}$ vive en una bola de centro $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$, r pequeño) de $\mathbf{x}_0$. Estudiaremos, pues, expresiones del tipo

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(x) = L$$

donde $L \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, lo cual, de manera intuitiva (y quizás esta sea la manera más importante de entender este concepto), significa que siendo $\mathbf{x}$ una "vecina íntima" de $\mathbf{x}_0$, entonces $f(\mathbf{x})$ es una "vecina íntima" de L, o bien, que estando $\mathbf{x}$ suficientemente cerca de $\mathbf{x}_0$, se puede tener a $f(x)$ suficientemente cerca de L. Todavia más, de otro modo, que podemos tener a $f(\mathbf{x})$ tan cerca de L como queramos, con tal de que $\mathbf{x}$ esté lo suficientemente cerca de $\mathbf{x}_0$. Todas estas ideas intuitivas se cristalizan rigurosamente en la siguiente definición.

Definición. (límite) Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto de U o bien un punto frontera de U. Se dice que el límite de f cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ es L, lo cual se escribe como

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

si dado cualquier $\epsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap U (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B(L, \epsilon) \quad ■$$

Fuente: Pita Ruiz (1995, 132)

La semejanza estructural de la definición de límite para los campos escalares con la correspondiente a las funciones escalares, esta identidad apreciable en el llamado mundo formal de la teoría AMT, no se mantiene en los dos mundos restantes. Se tiene aquí el caso de que una abstracción que no luce diferente en uno de los espacios, aunque es radicalmente distinta en otro. La prueba de esto se tiene si se considera el aspecto del proceso, con el cambio de la dimensión del entorno: el pasaje de dimensión uno a dos o más implica que las formas de aproximación al punto pasan de solamente dos a infinitas. El simple cambio de dimensión 1 a 2 dispara el problema a una cuestión que ya no es de grado, sino de naturaleza. De allí que las dificultades del concepto de límite para campos escalares sean considerablemente superiores a las del límite de funciones escalares, procesualmente hablando. Esta alteración de la complejidad de una abstracción según el mundo en el que se la considere no es una singularidad propia del concepto de límite analizado en este apartado.

4.3. Continuidad

El texto *Analysis I* (Zorich 2004, 158) define formalmente el concepto de continuidad de una función en un punto *a* en el lenguaje de entornos presentando las siguientes definiciones:

> Definición 0. Una función (definida en un entorno de *a*) *f es continua en el punto a* si para todo entorno *V*(*f*(*a*)) de su valor en *a*, esto es *f*(*a*), existe un entorno de *a*, *U*(*a*) cuya imagen a través de la función *f* está incluida en *V*(*f*(*a*)). (Zorich 2004, 157). Definición 1. Una función *f*: $E \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua en el punto a* $\in$ E si para todo entorno *V*(*f*(*a*)) de su valor en *a*, esto es *f*(*a*), existe un entorno de *a* en E, $U_E(a) = E \cap U(a)$ cuya imagen $f(U_E(a))$ está incluida en *V*(*f*(*a*)) (Zorich 2004, 158).

Las definiciones están escritas en el estilo de prosa reproducido en la Figura 15. Los aspectos de la continuidad en el mundo incorporado de la teoría del AMT no están representados en el texto. La definición etiquetada con el número 1 se incorpora tras una discusión de la definición provisoria de continuidad identificada con el número 0. En términos del marco teórico, la abstracción que la definición1 materializa puede decirse que es *también* una generalización de la primera. La diferencia es que, mientras la primera está restringida al caso de que *f* se halle definida en algún entorno del punto *a*, esa restricción es levantada en la segunda definición (como puede leerse en el primer renglón de la definición 1, al punto *a* solo se le pide que pertenezca al conjunto E). Como es propio de cualquier generalización, toda función que es continua en un punto según la definición 0 también lo es en ese mismo punto según la definición 1; al mismo tiempo, existen funciones que son continuas en un punto según la definición 1, pero que no lo son según la definición 0, para lo que basta observar que la segunda definición afirma indirectamente la continuidad de cualquier función en un punto aislado de su dominio, mientras que, según la primera, la noción de continuidad no es siquiera predicable en tales puntos.

Figura 15. Dos definiciones de continuidad de una función en *Analysis I*

Definition 0. Eine Funktion f ist *im Punkt a stetig*, wenn für jede Umgebung $V(f(a))$ ihres Wertes $f(a)$ in a eine Umgebung $U(a)$ von a existiert, deren Bild unter der Abbildung f in $V(f(a))$ enthalten ist.

Definition 1. Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ ist *im Punkt* $a \in E$ *stetig*, wenn es zu jeder Umgebung $V(f(a))$ des Wertes $f(a)$, den die Funktion in a annimmt, eine Umgebung $U_E(a)$ von a in E^1 gibt, deren Bild $f(U_E(a))$ in $V(f(a))$ enthalten ist.

Fuente: Zorich (2004, 157-158)

En lo que respecta a la abstracción, la única presencia de algún elemento que podría adjudicarse al mundo incorporado es el primer párrafo que abre el tema: "en términos intuitivos la función f es continua en a si los valores de $f(x)$ se aproximan a los de $f(a)$ cuando x se aproxima al punto a" (p.157). Esta forma de presentar una aproximación sensible al concepto de continuidad es propia de muchos libros de texto, como por ejemplo una obra clásica utilizada en la Argentina durante décadas que introduce el tema así (las cursivas no pertenecen al original) "*Intuitivamente*, la continuidad de una función $y = \mathrm{f}(x)$ significa que pequeños cambios en x ocasionan variaciones pequeñas de y, y no, por ejemplo, un brusco salto de su valor" (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1969, 387). Ninguna de estas expresiones puede considerarse una definición por ser incapaz de dar un criterio para separar las funciones continuas de las que no lo son, pues no permiten responder en qué condiciones puede considerarse un cambio 'pequeño', o qué debe juzgarse como un 'salto brusco'.

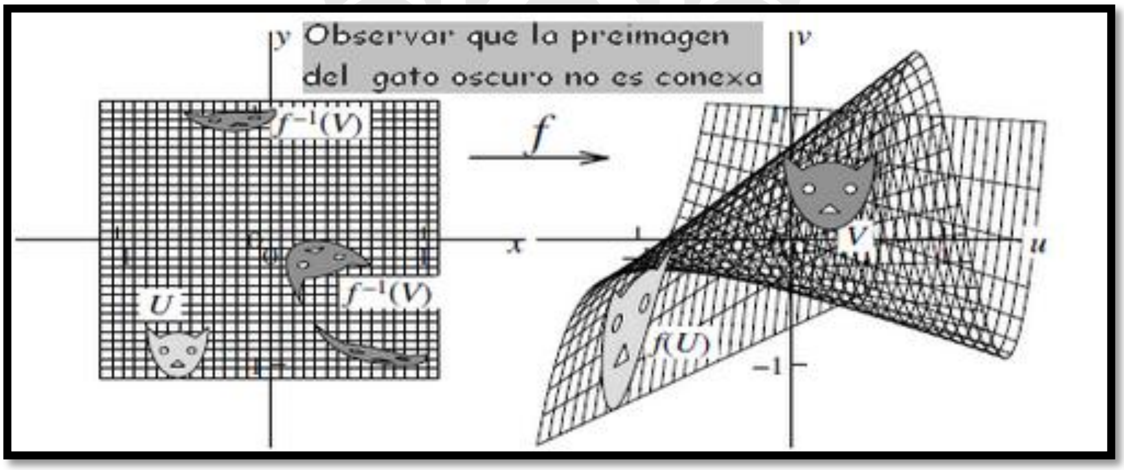
Aunque estas aproximaciones son denominadas intuitivas por ambos autores, la evidencia proporcionada por las investigaciones consideradas en el marco teórico establece que el aspecto perceptual de la continuidad de una curva se traduce mejor en la posibilidad de trazarla con un lápiz sobre un papel (o con un *mouse* sobre una pantalla) sin levantar el lápiz (sin dejar de arrastrar).

Desde luego, esta aproximación sensible y su relación con la definición formal no solo puede estar legítimamente fuera de un texto de Cálculo, sino que no es, en sentido estricto, parte del Cálculo. La única razón de su presencia es su capacidad potencial de proporcionar "una sólida base cognitiva para el Cálculo formal" (Tall 2011, 6). La descomposición genética del concepto de continuidad no difiere esencialmente de la explicada en el apartado anterior con ocasión de la definición formal de límite, bastando sustituir el número l por el valor $f(a)$ para que sean válidas las observaciones allí asentadas.

La necesidad de la abstracción formal (e insuficiencia de la aproximación intuitiva) puede ser fácilmente puesta en evidencia por una función como $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ es $1/n$ para cualquier racional $x = m/n$, mientras que es nula en todo otro caso. Es casi inmediato que la función es discontinua en todos los puntos racionales, a la vez que es continua en todos los irracionales; no hay modo de probar, ni siquiera concebir esta continuidad acudiendo a la noción perceptual de continuidad: el experimento de pensar en el gráfico de la función *f* para descubrir allí la continuidad es suficiente prueba de la incapacidad de la sola percepción[14].

Los libros de texto a veces dan lugar a ejemplos de funciones continuas que no lucen como tales a la percepción original, como puede verse en la Figura 16. La utilización del gato ayuda a visualizar el modo en que la función (no interesa aquí su expresión analítica) transforma la cuadrícula de la izquierda en la de la derecha; la noción intuitiva de continuidad se ve apoyada por lo que sucede con el gato claro, que solo parece haber padecido una amplificación con alguna distorsión, pero se ve cuestionada por el gato oscuro. La figura ayuda aquí al autor a asegurarse que el lector no debe transferir la propiedad de la continuidad a otro concepto completamente independiente como lo es el de inyectividad de las funciones. La función *f* que produce la transformación mostrada no es inyectiva, de allí que pueda observarse más de un gato oscuro en el panel de la izquierda (exactamente tres) cuya imagen a través de *f* es el *mismo* gato del panel derecho.

Figura 16. La continuidad de una función no impide rupturas visibles en la preimagen



Fuente: elaboración propia a partir del texto *Analysis by its History* (Hairer y Wanner 1996, 295)

La continuidad es otro de los conceptos en los que la definición formal expresada en un lenguaje suficientemente abstracto queda blindada a los cambios de dimensión del dominio; este blindaje, sin embargo, no es transferible a los mundos restantes. Basta como prueba lo que sucede en el mundo proceptual: el *concepto* sigue *escribiéndose* de la misma manera tanto para funciones escalares como para campos escalares, pero el

[14] Un esbozo de la prueba: para cualquier irracional a se puede encontrar un intervalo que excluya todos los números racionales de la forma irreducible m/n con n mayor que ε, para cualquier número positivo ε. De esta manera, para todos los x de ese intervalo resultará $|f(x)–f(a)| = |f(x)–0| = |f(x)| = |1/n| = 1/n < ε$, lo que prueba la continuidad en el irracional a. Para el detalle de por qué se afirma la existencia de un tal intervalo, ver Hairer y Wanner (1996, 224).

proceso cambia radicalmente debido a las infinitas maneras de considerar las aproximaciones al punto *a* cuyas imágenes a través de la función *f* deben encajar en los arbitrariamente próximos entornos del valor *f* (*a*).

Este desacoplamiento de la complejidad puede pasar desapercibido en las presentaciones que aprovechan la identidad formal del concepto, como lo prueba la Figura 17, que reproduce un fragmento del conocido texto *Calculus* volumen 2 de Tom Apostol (1980). El primer párrafo dice que la extensión de las nociones de límite y continuidad a campos escalares y vectoriales puede hacerse “con facilidad”; de inmediato al autor procede a mostrar que, efectivamente, las definiciones se pueden escribir apelando a la noción de límite de funciones escalares (“el límite corriente del Cálculo elemental”, como dice en el último párrafo).

La indudable *facilidad* de la reformulación enmascara el radical cambio de la naturaleza de la complejidad cuando el lector quiere hacer un lugar al nuevo concepto en los otros mundos desde los cuales puede verlo y sin los cuales su comprensión se verá, dentro de los supuestos del marco teórico, inevitablemente debilitada.

Figura 17. La identidad formal de la definición de continuidad y un ejemplo de *Calculus* volumen 2. (el sombreado no pertenece al original)

Los conceptos de límite y continuidad se pueden extender con facilidad a los campos escalares y vectoriales. Formularemos las definiciones para campos vectoriales; las mismas se extienden a los campos escalares.

Consideremos una función $\boldsymbol{f}: S \to \mathbf{R}^m$, donde S es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Si $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ escribimos

(8.1) $$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \qquad (\text{o, } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b} \text{ cuando } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$$

para significar que

(8.2) $$\lim_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \to 0} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| = 0 .$$

El símbolo de límite de la igualdad (8.2) es el límite corriente del Cálculo elemental. En esta definición no se exige que $\boldsymbol{f}$ esté definida en el mismo punto $\boldsymbol{a}$.

EJEMPLO 7. Una función de dos variables puede ser continua respecto a cada variable separadamente y en cambio ser discontinua como función de dos variables. Esto lo apreciamos en el ejemplo siguiente:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0 .$$

Fuente: Apostol (1980, 302, 306)

Uno de los recursos que los autores suelen utilizar para alertar acerca de diferencias que pudieran ser opacadas por la semejanza formal son los ejemplos que muestran precisamente que no deben hacerse transferencias entre los mundos: esa es la misión que cumple el ejemplo reproducido: la continuidad unidimensional no se transfiere al espacio n-dimensional.

4.4. Derivada de una función escalar

En el texto *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra*, de Tom Apostol (1967, 156-160) se presenta la noción de derivada de una función escalar simbolizada por *f'*(*x*), cuya característica tiene la dualidad propia que los teóricos del AMT adjudican a los símbolos, pudiendo entenderse por *f'*(*x*) tanto la derivada (el *concepto*), como la derivación (el *proceso* de su obtención a través del límite). La abstracción responde al tipo denominado *procepto*, en el que un solo símbolo se refiere dualmente a la *derivada* y a la *derivación*.

Se ha señalado antes que las abstracciones a menudo incluyen generalizaciones. En este caso, es el autor del texto quien incluye explícitamente esta observación, como puede notarse en el último párrafo de la reproducción de la Figura 18: "comparando (4.4) con (4.3), vemos que el concepto de velocidad instantánea es meramente un ejemplo del concepto de derivada". Al observar el autor que la velocidad es un caso de la derivada, el lector debe rellenar lo que esto implica: que la función *f* debe ser entonces la que devuelve la posición instantánea de una partícula, y que el argumento *x* debe ser el instante, de modo que *f* (*x*) devuelva, para cada valor de *x* la posición *f* (*x*).

Figura 18. Definición de derivada del texto *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra* de Tom Apostol

DEFINITION OF DERIVATIVE. *The derivative $f'(x)$ is defined by the equation*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{4.4}$$

provided the limit exists. The number $f'(x)$ is also called the rate of change of f at x.

By comparing (4.4) with (4.3), we see that the concept of instantaneous velocity is merely an example of the concept of derivative. The velocity $v(t)$ is equal to the derivative

Fuente: Apostol (1967, 160)

Siguiendo la presentación desde el inicio del capítulo en que el autor trata de la derivada, se advierte que la definición llega tras cuatro páginas (156-159) con diversos recursos –notas históricas, gráficos, la evocación del movimiento– que apelan a la abstracción empírica, y que se mantienen en el terreno del mundo incorporado. Entre las apelaciones a elementos observables que permiten un acercamiento al concepto, no se encuentra referencia al rasgo de linealidad local del comportamiento del gráfico de una función en un entorno del punto en el que se asegura su diferenciabilidad.

Figura 19. En una observación posterior a la definición formal, Apostol distingue entre el proceso de derivación y el concepto de derivada

In general, the limit process which produces $f'(x)$ from $f(x)$ gives us a way of obtaining a new function f' from a given function f. The process is called *differentiation*, and f' is called the *first derivative* of f. If f', in turn, is defined on an open interval, we can try to

Fuente: Apostol (1967, 160)

En el caso de la derivada, hay todavía una pequeña flexibilidad de uso en la notación que añade complejidad a la definición; si bien los símbolos de la función original y su derivada son de modo natural f y f', también se utiliza $f(x)$ y $f'(x)$, que en verdad se refieren a los valores de las funciones en el argumento x. El autor del texto distingue muy claramente entre el proceso de derivación que produce $f'(x)$ y la derivada como concepto, la función f': “En general, el proceso de paso al límite por el que se obtiene $f'(x)$ a partir de $f(x)$, abre un camino para obtener una nueva función f' a partir de una función dada f. Este proceso se llama *derivación*, y f' es la *primera derivada* de *f*…” (Apostol 2001, 196). Aunque las cuestiones de intertextualidad son consideras en otro capítulo de esta tesis, basta la reproducción traducida de la Figura 20 para hacer notar un tipo de problema que puede presentarse. En el texto original se habla de *rate of change* mientras que la traducción habla de *coeficiente de variación*. La traducción literal como “tasa de cambio” no es inusual en otros textos de ingeniería, mientras que la expresión “coeficiente de variación” no se usa de ninguna manera en el medio local. Luego, si el alumno se ha tomado seriamente la insistencia acerca del papel central de la definición, no tendría oportunidad de saber que debe desestimar por completo una parte de ella, justamente la que indica cómo se le llama a eso mismo que está definiendo.

Figura 20. Definición de derivada del texto *Calculus* 2, de Tom Apostol

DEFINICIÓN DE DERIVADA. *La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{4.4}$$

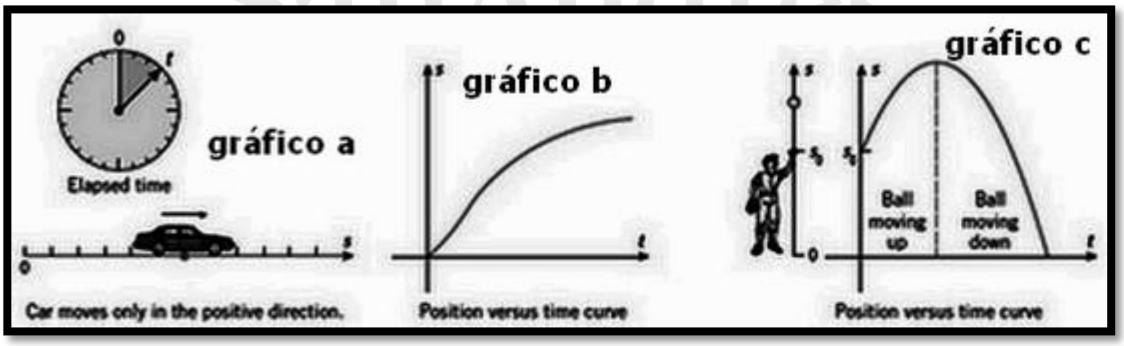
con tal que el límite exista. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x.

Fuente: Apostol (2001, 196)

El texto *Calculus. Early Transcendentals* (Anton, Bivens y Davis 2012) arriba a la definición de derivada con múltiples recursos que son presentados progresivamente, con una fuerte intervención de elementos del mundo incorporado a través de imágenes y percepciones que el autor va desarrollando a lo largo de algunas páginas (132-140) en las que se suceden percepciones del primer mundo con formalizaciones del tercero, los objetos son descriptos verbalmente previamente, e incluye una discusión acerca de la construcción práctica del concepto e invitaciones a experimentos mentales que permitan concebir la definición que finalmente quedará expresada en el mundo simbólico.

La Figura 21 muestra en el extremo izquierdo una imagen netamente instalada en el mundo incorporado, mientras que se halla en el plano simbólico el gráfico que devuelve en ordenadas la posición *s* del móvil en un dado instante *t* en abscisas; ya en el extremo derecho, el autor procura estrechar todavía más la conexión entre lo que es percibido y lo que es modelado por el gráfico. Tal como se dejara registrado en el marco teórico de este capítulo, las distancias entre los conceptos obtenidos por abstracción empírica y los producidos por la abstracción teórica se hacen en la matemática avanzada cada vez mayores y los caminos que las conectan son cada vez más intrincados. El concepto de derivada es paradigmático, en tanto está construido sobre el concepto de límite, que ya es en sí mismo de una abstracción considerable.

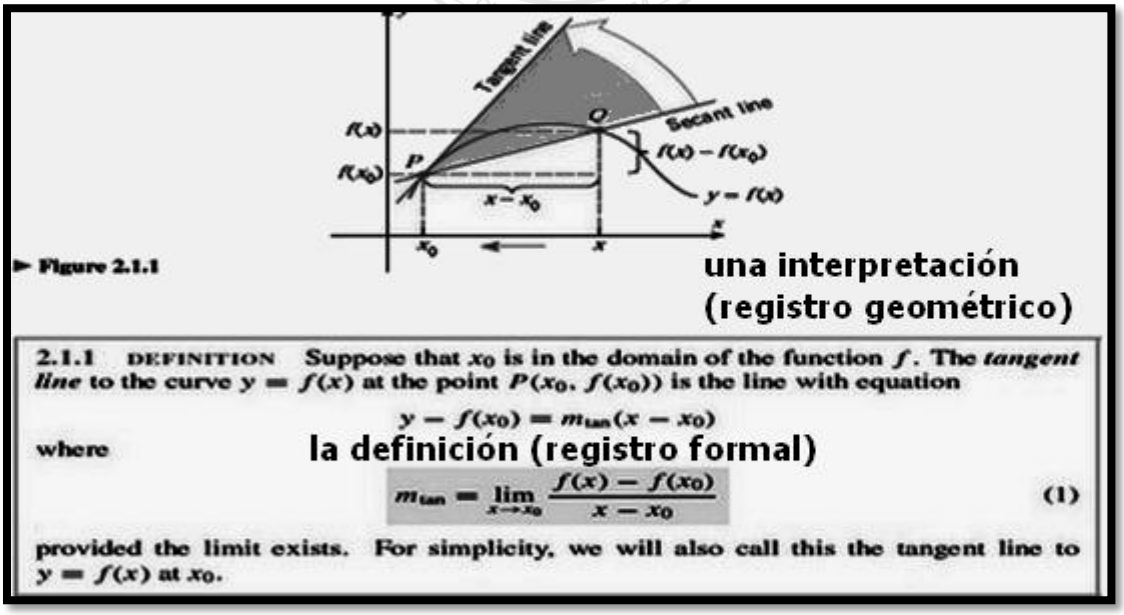
Figura 21. Mundo incorporado y mundo simbólico puestos en contacto por los autores de *Calculus. Early Transcendentals*



Fuente: elaboración propia a partir de Anton, Bivens y Davis (2012, 135)

Las representaciones en múltiples registros para mantener las conexiones entre lo percibido por los sentidos y lo objetivado en el plano simbólico nunca son tan directas y siempre demandan alguna actividad de la inteligencia, tanto más cuanto menos simples, según la descripción piagetiana “una conducta es tanto más inteligente cuando las trayectorias entre el sujeto y el objeto de su acción dejan de ser simples” (Piaget 2003, 21). Un análisis de la Figura 21 presta evidencia a esta caracterización, si se considera la diferencia entre la escena de la derecha (denominada gráfico c), donde es relativamente simple convertir el movimiento percibido (bola que sube, bola que baja) con el comportamiento del gráfico (función creciente, función decreciente) y hasta es bastante directa la identificación del instante en que la bola alcanza la altura máxima con la abscisa para la que la función *s* alcanza un máximo. En cambio, la correspondencia entre el movimiento del automóvil de la izquierda (gráfico a) y la ilustración central (gráfico b) es menos directa por una cuestión casi trivial: el eje de los desplazamientos lleva la dirección de la carretera (horizontal), mientras que constituye el eje de ordenadas (vertical) en el sistema cartesiano. Entre las dificultades introducidas por esta rotación, baste mencionar que el gráfico correspondiente a un automóvil detenido es una recta horizontal que 'avanza' hacia la derecha a medida que transcurre el tiempo, mostrando una velocidad (derivada de *s*) nula. Solo la observación atenta de las diferencias entre esos dos casos permite que las correspondencias que la figura intenta ilustrar no se transformen en obstáculos en sí mismas.

Figura 22. La derivada en *Calculus. Early Transcendentals*



Fuente: elaboración propia a partir de Anton, Bivens y Davis (2012, 132)

El autor procura mantener el contacto con el registro gráfico llegado el momento de la definición; suponiendo ya encapsulado el objeto gráfico, la definición puede ser anclada en un gráfico con una interpretación geométrica, tal como se ve en la Figura 22. La vinculación es reforzada introduciendo el color de la figura como una dimensión, lo que no se aprecia en la figura monocromática: la pendiente dada por el número *m* y hasta el proceso dinámico del límite queda sugerido por la cuña sombrada del panel superior.

Figura 23. La distinción entre el *concepto* de derivada y el *proceso* de derivación en *Cálculo com Geometria Analítica* . La tipografía enfatizada no es del original

Como sabemos, o processo de achar a derivada de uma função chama-se *derivação* (ou *diferenciação*). No Capítulo 2, esse processo foi baseado diretamente na definição de derivada. **Vimos que esse enfoque é bastante demorado e sem graça.**

Fuente: elaboración propia del texto *Cálculo com Geometria Analítica* (Simmons 2011, 107)

La dualidad proceso-objeto queda explícitamente manifiesta en el texto *Cálculo com Geometria Analítica*, que tras presentar cuidadosamente la definición de derivada, señala que el *concepto* dado por la definición podría no ser la manera de llevar a cabo el *proceso* de obtenerla (Figura 23); el autor contrapone lo que pretende hacer ahora con lo ya hecho en un capítulo precedente: “Como sabemos, el proceso de obtener la derivada de una función se llama *derivación* (o *diferenciación*). En el Capítulo 2, ese proceso fue basado directamente en la definición de derivada […] vimos que ese enfoque es bastante largo y tedioso” (Simmons 2011, 107). El texto, citado con frecuencia en universidades brasileñas y portuguesas, continúa con una exposición de los *procesos* de obtención, estableciendo los procesos rutinarios que permiten calcular las derivadas de funciones elementales.

4.5. Primitivas e integrales

Aunque el texto *A First Course of Calculus* (Lang 1984) define formalmente el concepto de primitiva de una función *f*, se prefiere aquí mostrar la presentación en que el autor, desde el principio, declara que se trata de un problema relacionado con un aspecto intuitivo (el del área de una región). Pero al mismo tiempo, como puede observarse en las palabras resaltadas de la parte superior de la Figura 24, la definición debe desprenderse de las adherencias del mundo incorporado, pues se necesita que “no apele a la intuición geométrica” (Lang 1984, 205).

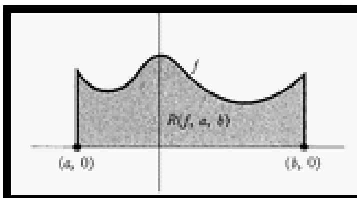
La parte inferior de la figura recoge el fragmento de otro texto (Spivak 1994) donde también se advierte acerca de que las aproximaciones a la definición de áreas de regiones planas pueden ser muy inapropiadas, aun para las regiones más sencillas como un círculo; en la geometría elemental, dice el autor, “el área de una región es a veces definida como el número de cuadrados de arista 1 que yace en el interior de la región. Pero esta definición es irremediablemente inadecuada hasta para las regiones más sencillas" (Spivak 1994, 250). La integración, tal como el autor lo muestra en el reglón identificado como (1) en la parte superior de la Figura 34, puede pensarse como un proceso: es el de aplicar técnicas de cálculo que permitan producir una función F a partir de una conocida función f, definidas en el mismo intervalo, de manera que la última sea la derivada de la primera.

Figura 24. Dos introducciones al capítulo de Integración de sendos textos de Cálculo, reproducción fotográfica (el sombreado no es parte del texto original)

In this chapter, we solve, more or less simultaneously, the following problems:
(1) Given a function $f(x)$, find a function $F(x)$ such that

$$F'(x) = f(x).$$

This is the inverse of differentiation, and is called integration.
(2) Given a function $f(x)$ which is ≥ 0, give a definition of the area under the curve $y = f(x)$ which does not appeal to geometric intuition.



In elementary geometry, formulas are derived for the areas of many plane figures, but a little reflection shows that an acceptable definition of area is seldom given. The area of a region is sometimes defined as the number of squares, with sides of length 1, which fit in the region. But this definition is hopelessly inadequate for any but the simplest regions. For example, a circle of radius 1 supposedly has as area the irrational number π, but it is not at all clear what "π squares" means. Even if we consider a circle of radius $1/\sqrt{\pi}$,

Fuente: Lang (1984, 205) y de Spivak (1994, 250)

Objetivada conceptualmente, F es una primitiva (una integral) de f sin estar asociada al proceso de integración. La dualidad propia del procepto como par (integración, integral) está, entonces, incorporada en la definición que se va a presentar. Más adelante (p.206) el mismo autor presenta la notación clásica de Leibniz[15] $\int f(x)dx$ para una primitiva de la función f, ya es una forma, todavía simbólica, de conectar los dos problemas con los que se abre el capítulo y que terminan de un modo natural en el llamado Teorema Fundamental del Cálculo, que constituye "una impresionante compresión del conocimiento, expresando la esencial conexión entre el cambio y el desarrollo acumulado en dos breves ecuaciones" (Tall 2011, 23).

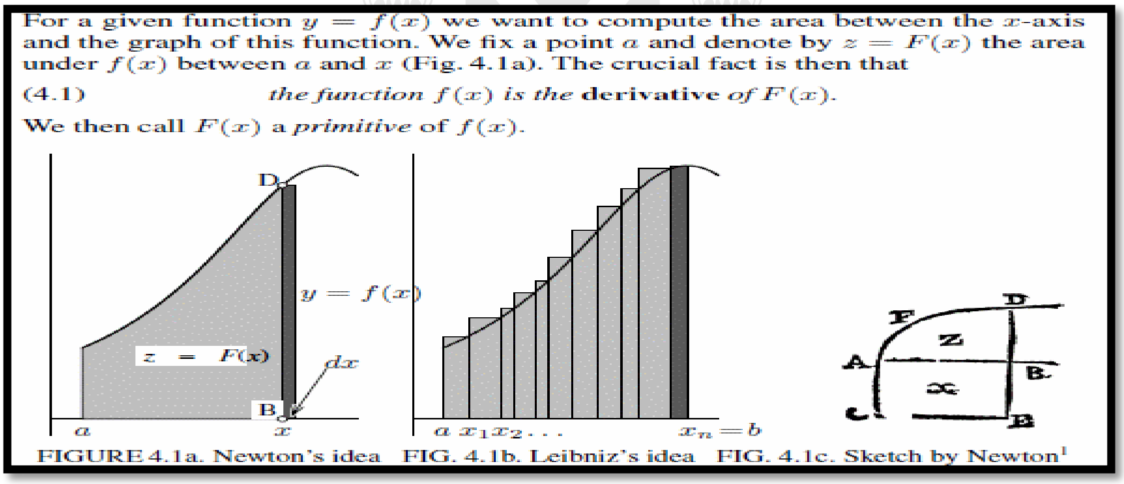
Una prueba de la elevada compresión alcanzada se tiene a través del desarrollo histórico, que muestra la noción de integración (pero no la de integral) como mucho más antigua que la de diferenciación, ya abordadas por el mismo Arquímedes; solo tras

[15] El símbolo ∫ con que Leibniz designaba lo mismo que Newton con un pequeño cuadrado; "notam ∫ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis…", escribía Leibniz en 1696 (Hairer y Wanner 1996, 107). La prevalencia de la notación se ha explicado por ser más 'expresiva' del proceso de acumulación (suma) que está en su raíz intuitiva.

la irrupción decisiva de Newton, Leibniz y Johann Bernoulli se alcanzaría a comprender su conexión. La utilización de los datos históricos para proporcionar al lector un acercamiento perceptual a los temas es constantemente explotada en el texto del que se reproduce un fragmento en la Figura 25.

En la primera y tercera gráfica (ésta un dibujo original del mismo Newton) se puede 'ver' la función primitiva *F* desde la perspectiva cinemática de Newton, con el segmento BD desplazándose d*x* añadiendo entonces un área dz = *f*(*x*) d*x*, mientras que la segunda figura representa mejor la concepción de Leibniz que entiende el área como la suma (la integral) de los pequeños rectángulos, de modo que $z_n = f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\,\Delta x_n$ de donde resulta que $z_n - z_{n-1} = f(x)\,dx$, nuevamente el resultado newtoniano.

Figura 25. El procepto Integral-Integración presentado con perspectiva histórica en *Analysis by its History*



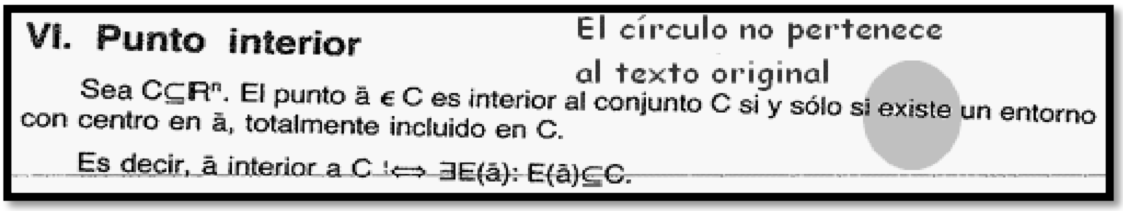
Fuente: Hairer y Wanner (1996, 107)

Dado que el proceso de integración y el concepto de integral están desde el origen mismo amalgamados en el Teorema Fundamental del Cálculo, el recurso al desarrollo histórico adquiere aquí un carácter funcional al mostrar algunos de las concepciones finalmente comprimidas en el Teorema.

4.6. Nociones de topología en espacios n-dimensionales

El Cálculo que involucra funciones de varias variables requiere de un aparato conceptual que permita precisar en qué sentido puede decirse que dos objetos están próximos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. El sistema se basa en el entorno de centro *a* y radio *r* >0, definido como el conjunto de puntos cuya distancia al punto *a* es menor que *r*, lo que puede designarse como E(*a*, *r*), a partir del cual se construyen las definiciones que clasifican los puntos.

Figura 27. Definición de *punto interior*, reproducción modificada del texto *Introducción al análisis matemático* . El círculo sombreado (no presente en el original) destaca que la definición se introduce a través de un cuantificador existencial


VI. Punto interior

Sea $C \subseteq R^n$. El punto $\bar{a} \in C$ es interior al conjunto C si y sólo si existe un entorno con centro en $\bar{a}$, totalmente incluido en C.

Es decir, $\bar{a}$ interior a C $\Leftrightarrow \exists E(\bar{a}): E(\bar{a}) \subseteq C$.

Fuente: elaboración propia a partir de *Introducción al análisis matemático* (Rabuffetti 1991, 12)

La definición de *punto interior* recogida en la Figura 26 pertenece a un libro de texto utilizado en algunas universidades que ofrecen carreras de ingeniería en la Argentina (Rabuffetti 1991), con particular intensidad en la Universidad Tecnológica de Buenos Aires. Lo que debe entenderse, en el mundo incorporado, por interior de una cosa parece ser bastante simple, la idea de lo que está 'dentro' de esa cosa, como se entiende cuando se habla del regalo que se halla dentro de la caja. Sin embargo, cuando la caja se torna más singular, se necesita pasar la abstracción a los siguientes mundos de la matemática, pasaje que tiene un costo: para empezar, requiere que el concepto de entorno, previamente introducido, ya haya sido encapsulado por el lector del texto para permitirle utilizarlo ahora como un objeto sobre el que caben proposiciones.

La definición de *punto interior*, puede leerse, se expresa en términos de la existencia de un entorno; tras la definición, el alumno que debe decidir si un punto es interior a un conjunto debe contrastar con la definición, y ya no le alcanza con aquellas consideraciones perceptuales que le permitían decidir si un regalo está o no dentro de una caja. De esta manera, si el alumno afirma que un dado punto es interior a un conjunto deberá construir un entorno centrado en ese punto y probar que todos los puntos de ese entorno pertenecen al conjunto. Si, en cambio, afirma que el punto no es interior, ahora deberá probar que no existe ningún entorno en las condiciones anteriores (o, lo que es lo mismo, que todos los entornos que puedan construirse tendrán al menos un punto que no pertenece al conjunto). La abstracción ha ingresado plenamente en el mundo formal, desprendido de sus relaciones con el mundo perceptual, ya del todo insuficiente para responder una cuestión como la de indicar cuáles son los puntos interiores del subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ conformado por los puntos del círculo de radio unitario centrado en el origen cuyas coordenadas son irracionales. La respuesta, algo sorprendente desde el mundo perceptual, es que el conjunto no tiene puntos interiores (el interior es vacío); la frontera del conjunto, por otro lado, es el círculo completo, esto es, tiene su frontera tiene más puntos que el conjunto mismo. Si el conjunto es pensado como un país, podría decirse que no hay lugar para habitarlo, mientras que sus fronteras son más extensas que su propio territorio. Se ve aquí cómo la abstracción se alcanza solo superando algunos obstáculos que son propios del mundo incorporado, que debe ser reajustado para no entrar en conflicto con el mundo formal.

La Figura 27 reproduce la definición de *conjunto abierto* de un libro de texto ya clásico de intensa presencia en todas las bibliografías de asignaturas de Cálculo, que se asienta en una definición previa (la de disco abierto). Es de interés observar que los autores dan, tras la definición, una aprehensión intuitiva a la noción establecida formalmente: es abierto el conjunto que no contiene puntos de su frontera. Es importante observar que el plano intuitivo solo funciona *a posteriori* de que la noción de *frontera* ha sido ya encapsulada como objeto, y debe decirse también que la noción de frontera no es menos abstracta que la de conjunto abierto. Las aproximaciones intuitivas al concepto terminan –o empiezan– en una definición y si bien pueden bastar para un primer vistazo de aquello que en casos corrientes se quiere decir, son del todo insuficientes para discernir en los casos menos inmediatos que se presentan en este nivel de la matemática; volviendo al ejemplo del conjunto A de ℝ² conformado por los puntos del círculo de radio unitario centrado en el origen cuyas coordenadas son irracionales, la definición permite concluir que no es abierto, y la aproximación intuitiva también, pero solo *después* de que se ha averiguado por la frontera del conjunto A.

Figura 27. Reproducción de una definición de *conjunto abierto* del texto *Cálculo Vectorial*

DEFINICIÓN: Conjuntos abiertos Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ (es decir, sea U un subconjunto de $\mathbb{R}^n$). Llamamos a U ***conjunto abierto*** si para todo punto $\mathbf{x}_0$ en U existe $r > 0$ tal que $D_r(\mathbf{x}_0)$ está contenido dentro de U; simbólicamente escribimos $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ (*véase* la Figura 2.2.2).

El número $r > 0$ puede depender de $\mathbf{x}_0$, y por lo general r decrecerá cuando $\mathbf{x}_0$ se aproxime al «borde» de U. Intuitivamente, un conjunto U es abierto cuando los puntos de la «frontera» de U no pertenecen a U. En la Figura 2.2.2, la línea discontinua *no* está incluida en U.

Convendremos en que el conjunto vacío $\varnothing$ (el conjunto que no tiene elementos) es abierto.

Hemos definido disco abierto y conjunto abierto. Por la elección que hemos hecho de los términos parece que un disco abierto debería ser un conjunto abierto. Si se piensa un poco se ve que este hecho requiere demostración. El teorema que sigue lo prueba.

Fuente: Marsden y Tromba (1991, 102)

El autor hace también una observación respecto al lenguaje técnico que contiene términos como 'conjunto abierto' y 'disco abierto'. Lo que señala es que el disco abierto ha sido definido antes de que se supiera lo que era un conjunto abierto, y ahora que se ha presentado la definición, la pregunta que surge es si un disco abierto es o no un conjunto abierto, lo que se responde afirmativamente por medio del teorema siguiente en el libro de texto, no reproducido aquí. La distinción apunta a que el lenguaje, siendo arbitrario, nada indica de atributos externos a su definición: el haber llamado 'disco abierto' a un conjunto que *después* se prueba que es abierto, solo dice que el nombre estuvo bien elegido *antes*.

4.7. Derivadas parciales

La definición de *derivada parcial* para un campo escalar tal cual está presentada en el texto *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables* (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968) se reproduce en la Figura 28. Respecto a la naturaleza de la abstracción y su posición en los mundos vale lo dicho en el correspondiente apartado ya tratado de la derivada de funciones escalares, respecto a la dualidad del proceso de derivación y el concepto de derivada.

Figura 28. La definición de derivada parcial de un campo escalar en *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables*

DEF. *Llamaremos derivada parcial respecto de* x, *de la función* $z = \mathbf{f}(x, y)$, *indicándola con cualquiera de las notaciones*

$$\mathbf{f}_x(x, y)\ ,\ \mathbf{D}_x\mathbf{f}(x, y)\ ,\ \frac{\partial \mathbf{f}(x, y)}{\partial x}\ ,\ z_x\ ,\ \mathbf{D}_x z\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x}\ ,$$

a la derivada así obtenida, dejando fijo el valor de la otra variable

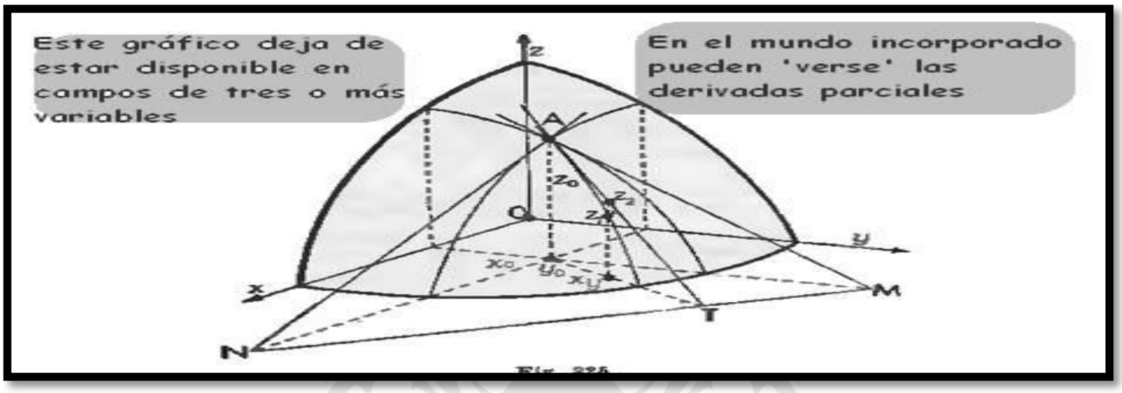
$$[66\text{-}1] \quad \mathbf{f}_x(x, y) = \lim \frac{\mathbf{f}(x + \Delta x, y) - \mathbf{f}(x, y)}{\Delta x} \quad \text{para} \quad \Delta x \to 0.$$

Fuente: Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1968, 125)

Debe añadirse, sin embargo, que hay en este caso una exigencia mayor puesto que debe incorporarse la cuestión del mantenimiento de una componente de la variable fija mientras que la restante se deja deslizar sobre una porción de recta, manteniéndose en el dominio. Por otra parte, la presentación de la derivada parcial para el caso de variables bidimensionales exige una posterior generalización para el caso *n*-dimensional.

En este caso se produce una situación especial respecto a la diferenciación entre abstracción y generalización. Esta generalización no debiera implicar, en principio, una nueva abstracción en lo que se refiere a su definición en el mundo formal: bastará con mantener constantes las $n-1$ restantes componentes. Lo que sucede, sin embargo, en los otros mundos es claramente diferente; tómese el caso de uno de los recursos que utiliza el autor para conectar la abstracción con el mundo incorporado, esto es la gráfica del campo escalar, tal como se muestra en la Figura 29.

Figura 29. Reproducción de una interpretación geométrica de las derivadas parciales de *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables*. Los sombreados no pertenecen al original

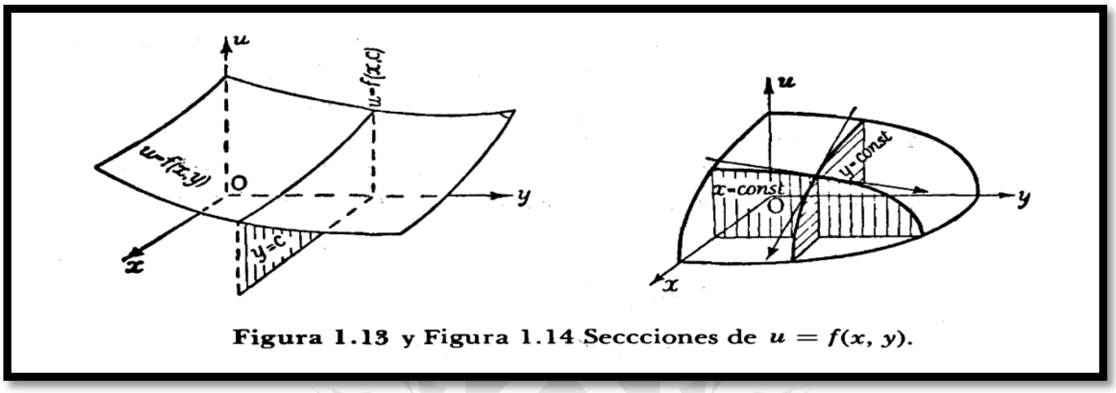


Fuente: elaboración propia a partir de Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1968, 135)

El lector puede 'ver' las derivadas parciales como marcando las pendientes de las rectas AN y AM, también le es dado concebir ambas rectas en un mismo plano (y en tal caso ver el plano tangente a la gráfica de la función *z* en A, tal como luego será definido). Pero esta visualización deja de estar ya disponible con solo cambiar de dos a tres componentes: la gráfica de la función es ahora un objeto que reside en el espacio tetra-dimensional, el plano tangente se transforma en una variedad tridimensional. Lo más conveniente para el alumno es, en este caso, dejar de lado la interpretación geométrica e ingresar de modo directo en el mundo formal; alternativamente, puede permanecer en el mundo incorporado interpretando la derivada como una medida de la sensibilidad de una función ante las modificaciones introducidas en una de sus componentes: la noción de sensibilidad no es vulnerable a los incrementos de dimensión.

En la Figura 30, tomada del texto *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 2* de Courant y John (1999b, 53), puede observarse que los autores han reforzado la visión de las secciones del gráfico del campo escalar con los planos que resultan de considerar constantes una u otra de las dos variables. Las curvas planas así obtenidas permiten a los autores remitir el concepto de derivadas parciales al de las derivadas totales que se suponen conocidas por los lectores que ya habrían tomado un curso de Cálculo de una variable real. El recurso a la visualización geométrica del concepto deja de estar disponible en campos escalares definidos en espacios *n*–dimensionales en general.

Figura 30. Reproducción de figuras introducidas para una interpretación geométrica de las derivadas parciales por los autores de *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 2*



Fuente: Courant y John (1999b, 53)

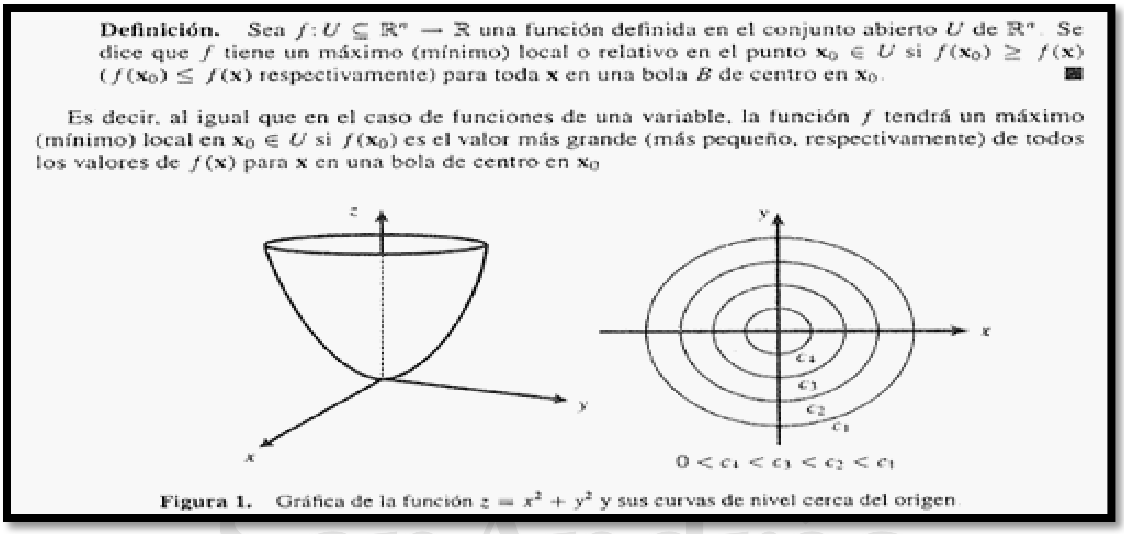
4.8. Extremos locales

La definición de *extremos locales* (máximos locales, mínimos locales) de campos escalares definidos en un abierto de $\mathbb{R}^n$ del texto *Cálculo Vectorial* de Pita Ruiz (1995) que se reproduce en la Figura 31 pone de relieve la naturaleza de la abstracción en este caso, los recursos puestos en juego para presentarlos.

En primer lugar, la abstracción contiene una generalización del concepto de extremos para funciones escalares (el caso $n = 1$), pero no se reduce a una generalización debido a que el cambio de la dimensión del entorno unidimensional de las funciones escalares al caso de entornos n-dimensionales (con $n > 1$) implica que existen infinitas formas de examinar lo que sucede alrededor del punto. Tal como en otros apartados de esta misma sección, se está en un caso en que la definición formal puede formularse en un lenguaje tal que los cambios de dimensión no la afecten, sin que de ello pueda concluirse que la complejidad del concepto tampoco se vea afectada, cuando es abordado para su aprendizaje, a través de los mundos no formales.

Como prueba de lo diferente que pueden verse las nociones de extremos según varía el número *n* para funciones con dominio en $\mathbb{R}^n$, puede observarse lo que sucede con los registros gráficos a los que suele acudirse para ilustrar la definición. Suponiendo, para simplificar, funciones *f* suficientemente suaves, se tiene que para *n* = 1, la gráfica de la función (escalar) es una curva que presenta una depresión donde alcanza un mínimo, mientras que para *n* = 2 el punto ahora se ve como el fondo de un valle, hasta cierto punto análogo al caso *n* = 1. Pero para *n* = 3 o mayor, la gráfica de *f* es ya un objeto que yace en el espacio *n* + 1 dimensional, y persistir con una interpretación geométrica no ofrece sino obstáculos para la comprensión de la idea de máximo local.

Figura 31. Reproducción de la interpretación geométrica de extremos de campos escalares de dos variables del texto *Cálculo Vectorial*



Definición. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un máximo (mínimo) local o relativo en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$ si $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ ($f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ respectivamente) para toda $\mathbf{x}$ en una bola B de centro en $\mathbf{x}_0$. ■

Es decir, al igual que en el caso de funciones de una variable, la función f tendrá un máximo (mínimo) local en $\mathbf{x}_0 \in U$ si $f(\mathbf{x}_0)$ es el valor más grande (más pequeño, respectivamente) de todos los valores de $f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x}$ en una bola de centro en $\mathbf{x}_0$

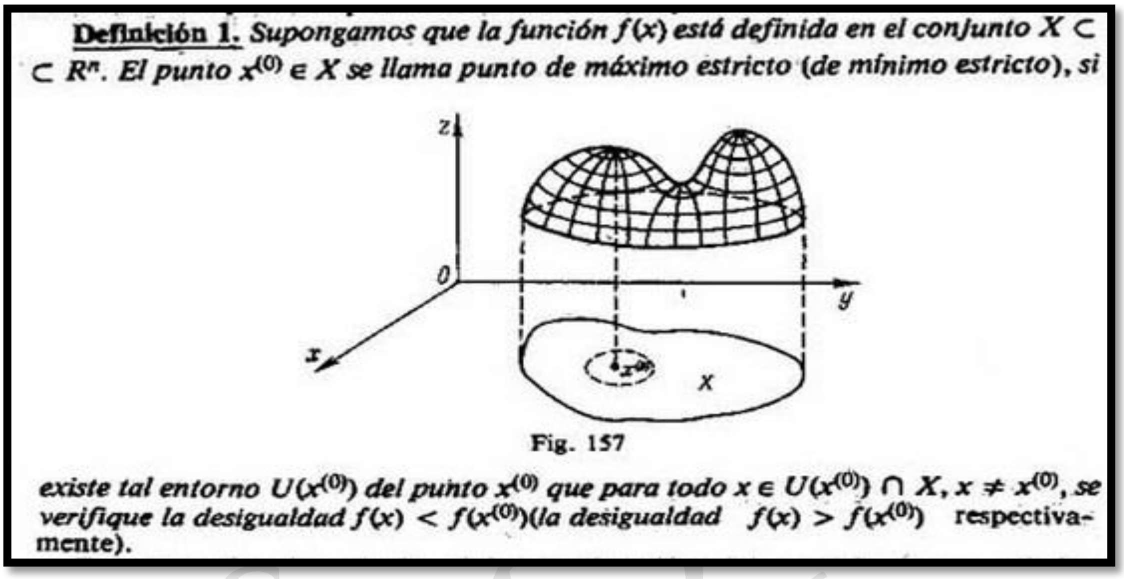
Figura 1. Gráfica de la función $z = x^2 + y^2$ y sus curvas de nivel cerca del origen.

Fuente: Pita Ruiz (1995, 335)

La definición formal es inmune a las alteraciones dimensionales del espacio sobre el que se define el campo escalar, pues está construida con objetos que a su vez pueden definirse en un espacio métrico sin intervención alguna de la dimensión: es el caso de la noción de *bola* tal como se lee en la definición reproducida. Se replica aquí la situación corriente propia de la matemática que se está estudiando, en la que cada concepto se construye a partir de conceptos previamente definidos: la noción de extremos está caracterizada a partir de las relaciones entre nociones previas como las de entorno y bola, las que a su vez está definidas partiendo de la noción de distancia introducida en un conjunto para construir un espacio métrico…

El análisis de la definición presentada en la Figura 32 del texto *Curso de análisis matemático. Tomo II* de Kudriávtsev (1984, 28) lleva a similares consideraciones que las del texto anterior, aunque presenta algunas peculiaridades en lo que hace al nivel de abstracción. La definición de Pita Ruiz se apoyaba en el concepto de bola (además del de entorno), en tanto que la Kudriávtsev se basta con la de entorno, lo que desde el punto de vista cognitivo supone una menor demanda de conocimientos o definiciones previas, mientras que la interpretación geométrica no difiere en lo esencial –salvando el detalle de que aquí se ilustra un máximo en lugar del mínimo del texto anterior–, pero hay una diferencia en el objeto que se define: aquí se trata de la localización del extremo, mientras que en el texto anterior se define el extremo mismo.

Figura 32. Reproducción de la definición de puntos de extremos de un campo escalar en el texto *Curso de análisis matemático. Tomo II*


Definición 1. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida en el conjunto $X \subset \subset R^n$. El punto $x^{(0)} \in X$ se llama punto de máximo estricto (de mínimo estricto), si*

existe tal entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ que para todo $x \in U(x^{(0)}) \cap X, x \neq x^{(0)}$, se verifique la desigualdad $f(x) < f(x^{(0)})$(la desigualdad $f(x) > f(x^{(0)})$ respectiva-mente).

Fuente: Kudriávtsev (1984, 28)

Las dos definiciones no llevan a identificaciones equivalentes: mientras que en el primer texto los extremos están definidos en sentido amplio, en este lo están de modo estricto –las desigualdades son estrictas– y así bien puede darse el caso que el primer texto señalaría como extremos (amplio) valores que no serían computados como extremos (estrictos) en el segundo texto, para lo que basta el ejemplo del campo escalar f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 1$, que tiene por máximo y mínimo a la vez el valor 1 según Pita Ruiz, mientras que no lo tiene según Kudriávtsev.

De particular interés en este último texto es el párrafo en que el autor declara la eficacia de la definición abstracta, señalando que se halla por encima de las alteraciones que pudiera sufrir la dimensión del espacio en el que se halla incluido el dominio del campo escalar como se ve en la Figura 33. La afirmación es inobjetable en el nivel formal. Efectivamente, en el lenguaje formal, no hay diferencia alguna entre hacer una prueba en un espacio unidimensional y un espacio de dimensión cualquiera –finita, claro–. Pero esto no permite extrapolar la indiferencia dimensional del mundo formal a una indiferencia cognitiva, pues las interpretaciones y acercamientos intuitivos se separan considerablemente cuando el mundo incorporado da lugar a otras representaciones. Solo para mencionar un ejemplo, el *proceso* de producción prueba de que una función (no necesariamente suave) alcanza en un extremo en un punto es bastante sencilla en el caso de que la función sea escalar (estos es $n = 1$), mientras que puede ser definitivamente arduo en el caso de los campos escalares ($n > 1$). Si los procesos mismos difieren, lo mismo cabe decir de las representaciones disponibles: ya se ha mencionado que los gráficos que acompañan las definiciones de los dos textos son del todo imposibles para campos escalares de más de dos variables.

Figura 33. Reproducción de la declaración del autor del texto *Curso de análisis matemático. Tomo II* donde afirma que un aumento de la dimensión del dominio del campo escalar no introduce un aumento de complejidad

> Los problemas que se estudian en este párrafo y en algunos otros que siguen llevan un carácter analítico y sus demostraciones no se hacen más difíciles al aumentar el número de las variables. Es por eso que nuestra intención es considerar dichos problemas en el caso general n-dimensional, subrayando, si es necesario, sus pecualiaridades específicas para los casos de $n = 2$ y $n = 3$.

Fuente: Kudriávtsev (1984, 27)

Esta dificulta, sin embargo, no obliga al abandono de los registros del mundo incorporado solamente porque los geométricos se tornen inadecuados; bien puede proseguir viéndose la definición de extremo local como aquella combinación de recursos (las componentes del argumento vectorial) que producen un resultado que se pretende como óptimo (esto es el resultado de combinar esos recursos en la función objetivo *f*), porque se maximice algún efecto deseable o minimice uno nocivo.

Figura 34. La definición de mínimo relativo en el texto *Calcul Différentiel*

> **Définition 1.1.** — Soient E un e.v. normé, A une partie de E, f une fonction définie sur A et à valeurs réelles. On dit que f présente un *minimum relatif* en $a \in A$ s'il existe un voisinage ouvert U de a dans E tel que $f(a) \leq f(x)$ pour $x \in U \cap A$.

Fuente: Avez (1987, 102)

Finalmente, la definición de extremos del texto *Calcul Différentiel* (Avez 1987, 102) "Sean E un e.v. [la abreviatura está por 'espacio vectorial'] normado, A un subconjunto de E, *f* un campo escalar definido en A. Se dice que *f* presenta un *mínimo relativo* en $a \in A$ si existe un entorno abierto U de *a* en E tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in U \cap A$", y que se reproduce en la Figura 34 está escrita en el lenguaje formal sin apelación alguna a objetos familiares, y tiene un alcance mayor, desde que está dada en un espacio normado no necesariamente el $\mathbb{R}^n$ de las definiciones anteriores. Aquí procede no solo una generalización sino también una abstracción mayor, dado que los elementos del conjunto en el que se define la función son ahora más amplios.

4.9. Curvas

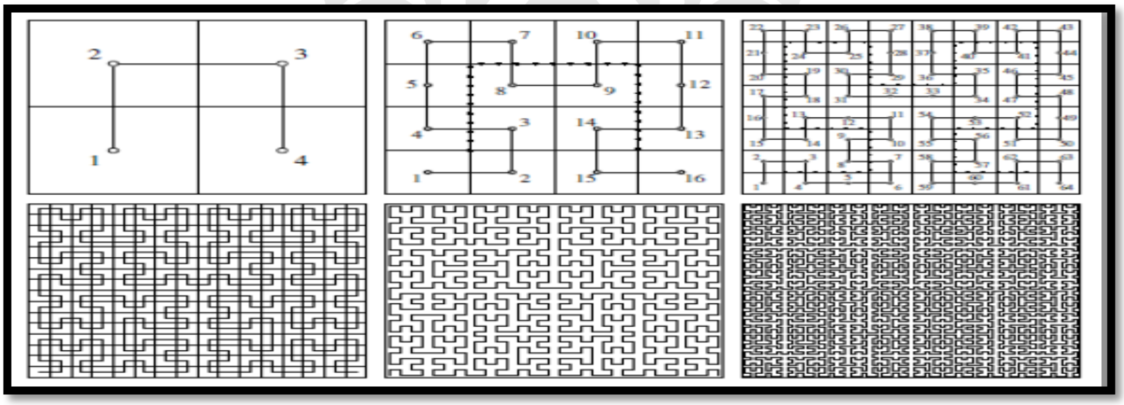
El caso de las curvas presenta una singularidad respecto a los conceptos analizados anteriormente: el nombre de *curva* puede ser imputado a objetos bastante diversos según las preferencias del autor o el contexto en el que se inscribe. La diversidad de definiciones recoge tradiciones históricas referidas al concepto, según se concibiera como un conjunto de puntos o como la imagen de una función vectorial, y ciertas conmociones entre las que se encuentran la curva de Peano y la curva de Hilbert hacia fines del XIX (Hairer y Wanner 1996, 291-292), que obligaron a introducir mayor o menor intensidad en las definiciones según se quisiera excluir o incluir dentro del concepto objetos que parecen contradecir la noción intuitiva. Se consideran en primer lugar las definiciones de dos textos que se etiquetan como Definición 1 y Definición 2 (Apostol 1980, 393, Postnikov 1988, 197-198).

> Definición 1. Sea α una función vectorial definida en un intervalo cerrado finito J = [a, b]. Cuando *t* va tomando los valores de J, la función $\alpha(t)$ describe un conjunto de puntos en el *n*-espacio llamado *gráfica* de la función. Si α es continua en J la gráfica se llama *curva*; con mayor precisión, es la curva descrita por α. […] α se llama *camino* (Apostol 1980, 393).

La definición 1 se da directamente en el espacio n-dimensional, el lector debe concebir una curva como un conjunto de puntos en un espacio que escapa a una aprehensión dentro del mundo incorporado, y ubicarla en el espacio $\mathbb{R}^n$; por añadidura, necesita imaginarla como la imagen de una función vectorial α que actúa como respaldo de ese conjunto de puntos. La misma definición es una invitación a seguir el *proceso* que va dibujando el conjunto de puntos ("cuando *t* va tomando los valores de J…"), pero a la vez exige al lector una encapsulación previa del concepto de función vectorial continua para finalmente poder tomar esa curva como objeto sobre el que a su vez puedan actuar nuevos procesos, en un nivel superior. Solo una vez cumplida esta secuencia la curva podrá ser, por ejemplo, un concepto sobre el que se pueda hablar en una integral curvilínea. La distancia existente entre este concepto y la noción intuitiva no se cubre con una abstracción por selección de rasgos comunes a objetos familiares, sino que importa una abstracción de propiedades que permite una traslación al mundo proceptual, donde finalmente reside el concepto de curva.

En la Figura 35 se muestra la construcción de una curva que satisface la definición anterior y que, sin embargo, termina contradiciendo la intuición de una curva imaginada como una línea sin espesor, dado que, como la figura lo sugiere, la curva termina invadiendo todos los puntos del cuadrado en el que se desarrolla, logrando pasar por cada uno de sus puntos. Este hecho es señalado por los autores del texto (Hairer y Wanner 1996, 291) para mostrar cómo puede diferir una noción intuitiva de una definición que parece captar lo esencial de esa misma intuición. La segunda definición de curva, como puede verse más abajo, está acompañada por una observación: “se subraya que una curva continua es, por definición, no un conjunto de puntos, sino una aplicación” (Postnikov 1988, 197).

Figura 35. El proceso de construcción de la curva de Peano-Hilbert en *Analysis by its History*



Fuente: Hairer y Wanner (1996, 291)

Basta esta observación para comprender que el autor está señalando que no debe entenderse por curva aquello que el primer autor define como tal. Sin detenerse en los motivos por los que dos autores pueden diferir en lo que deba entenderse por curva, lo importante aquí es atender la capacidad de la abstracción de construir objetos consistentes con un entramado de otros objetos y relaciones, siendo esta construcción, hasta cierto punto, muy flexible.

En el texto no sólo se destaca la brecha que puede abrirse entre el lenguaje utilizado en modo coloquial y los objetos definidos (“*no importa que el vocabulario utilizado lo contradiga constantemente*”, dice el autor) sino que indica que debe pasarse por alto esa contradicción, o más bien, que debe restituirse el sentido en que se acepta esa contradicción como una forma de aliviar las expresiones lingüísticas de recargadas aclaraciones. Esta característica evidencia el grado de compresión propio de las abstracciones tal como se apuntara en el marco teórico. Un ejemplo de esa compresión y restitución lo da el mismo autor, al explicar que cuando se escribe "la curva pasa por $\mathbf{x_0}$" el lector debiera estar en condiciones de leer "existe algún valor del parámetro *t*, digamos t_0 (que, en general, no es único), comprendido en el intervalo $[a, b]$, tal que para ese valor se verifica que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$". Si esa conversión puede ser natural en quien ya se ha apropiado de la esencia formal de la definición, no lo es de manera alguna en quien está introduciéndose en lo que una curva sea a través de la lectura.

> Definición 2. Se llama *curva continua* en el espacio euclídeo (o afín) E de dimensión *n* a la aplicación continua $\mathbf{x}: t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ de un segmento $[a, b]$, $a < b$, de eje *t* en el espacio E (se sobrentiende que los puntos de E están identificados por sus radios-vectores desde un punto fijo O)[…] Se destaca que una curva continua es, por definición, no un conjunto de puntos, sino una aplicación; no importa que el vocabulario utilizado lo contradiga constantemente […] Se llama a veces *soporte* de la curva al conjunto de todos sus puntos, i.e. la imagen de [a, b] por la aplicación **x** (Las cursivas pertenecen al original). (Postnikov 1988, 197)[16].

La presentación de estas dos definiciones de un mismo término muestra la importancia que en la lectura tiene la distinción entre el significante y lo que significa: en ambos casos se define lo que debe entenderse por *curva*, pero el objeto al que aluden no es el mismo. Los dos textos comparten la misma bibliografía de la misma asignatura, pero en términos estrictos, no puede decirse que la palabra *curva* del texto de la primera definición sea un sinónimo de la palabra *curva* de la segunda definición. La sinonimia aquí se entiende en el sentido adquirido desde Leibniz: dos términos son sinónimos si uno puede ser sustituido por el otro en un enunciado sin alterar su valor de verdad, o en términos menos vagos, los términos *s* y σ son sinónimos en una proposición *p* si y solo si la sustitución de *s* por σ en la proposición *p* da lugar a una proposición *q* que es lógicamente equivalente a la proposición *p*, con lo que la sinonimia queda asociada a un lenguaje L y es una afirmación que necesariamente se formula en un metalenguaje ML de L, esto es la proposición "*s* es sinónimo de σ en L" es una proposición que yace en ML.

En el caso que se analiza, si con A1 y A2 se designa a los autores, es claro que el par ordenado (curva, A1) no es sinónimo del par ordenado (curva, A2), afirmación cuya evidencia empírica la constituyen las definiciones etiquetadas como 1 y 2 en este

[16] El texto original dice: On appelle *courbe continue* dans l'espace euclidien (ou affine) E de dimension *n* l'application continue d'un segment [a, b], a < b, de l'axe des *t* dans l'espace E […] On souligne qu'une courbe continue est par définition non un ensemble de points, mais une application ; n'empêche que le vocabulaire utilisé le contredit constamment […] On appelle des fois *support* de la courbe l'ensemble de tous ses points, i.e. l'image de [a, b]… (Postnikov 1988, 197-198).

apartado. En cambio, sí puede decirse que *curva* en el lenguaje de A1 es sinónimo de *soporte* en el de A2, mientras que *curva* en el lenguaje de A2 es sinónimo de *camino* en el de A1. Esta discusión acerca de la sinonimia a propósito de dos definiciones muestra de qué manera la definición de un concepto abstracto es determinante de los subsiguientes predicados que pueden corresponderle al concepto en el mundo formal; por ejemplo, la expresión *curva derivable* es absurda en el lenguaje del autor A1, mientras que tiene sentido propio en el lenguaje del autor A2. Como consecuencia, el alumno que acogiera la recomendación bibliográfica y decidiera seguir estos dos autores, debería ser capaz de advertir estas distinciones al mismo tiempo que efectuar la correspondiente traducción durante su lectura.

4.10. Superficies y Variedades

El texto *Cálculo Vectorial* (Pita Ruiz 1995, 821-824) antepone a la definición formal del concepto de *superficie* una serie de aproximaciones que se mueven en el primer mundo de la matemática, pretendiendo así establecer alguna conexión empírica de lo que luego se consolidará como una definición, tal como puede verse en el siguiente párrafo.

> De otro modo: podemos pensar en una superficie como "una sábana en el instante en que ésta va volando por los aires al tender nuestra cama": inicialmente la sábana se encontraba sobre la cama (este es el espacio $\mathbb{R}^2$ y la sábana misma es la región *S*). Al levantarla de la cama, la sábana cobra vida en el espacio $\mathbb{R}^3$. La forma de ésta en un instante dado es lo que llamaremos "superficie" (Pita Ruiz 1995, 821).

El texto evoca una imagen cotidiana de sencilla aprehensión en el mundo incorporado, y basta para una primera impresión de la naturaleza de lo que se quiere definir, dejando desde el principio claro que una superficie es un conjunto de puntos del espacio (los de la sábana, en el texto). Desde luego, estas percepciones así sugeridas por la descripción, deben poder ser condensadas en el lenguaje simbólico para resumirlas en un procedimiento que permita generar esas superficies (un proceso) y que las superficies mismas puedan luego intervenir como objetos a ser procesados en abstracciones de nivel superior. La definición que alcanza esta dualidad, ya plenamente en el mundo formal, es introducida por el autor con una advertencia que es también aplicable al recién tratado caso de las curvas: “La definición que aquí presentamos, que puede ser distinta a la que se presenta en los libros de geometría diferencial, es la que más nos conviene para su posterior uso en el estudio de las integrales de superficie” (Pita Ruiz 1995, 822). Aquí el autor previene a sus lectores de que, posiblemente, pueda leer otras definiciones de superficie, a la vez que da un motivo –utilitario– de su elección, anticipando a su vez la dualidad *proceso-concepto*: lo que está definiendo será luego tomado como objeto de insumo en un proceso de orden superior denominado “integrales de superficie”.

El autor, además, procura no despegarse de inmediato de su analogía introductoria de la sábana y, anticipando a la definición, intenta que el lector puede percibir todavía conexiones entre la imagen evocada y los conceptos que habrán de involucrarse en la definición; tal el sentido del párrafo que sigue.

> Por supuesto, algunas acotaciones sobre la región S donde está definida la función **r,** así como a las características de diferenciabilidad de esta función, deben ser hechas para que podamos aceptar como definición rigurosa esta idea general de superficie. Con nuestro ejemplo de la sábana, debemos imponer condiciones para que al estar volando ésta no aparezcan picos ni aristas en ella. (Pita Ruiz 1995, 822).

El esfuerzo del autor está dirigido a que el lector, pronto a ingresar en el mundo proceptual y formal, pueda todavía retener algunas propiedades de la sencilla imagen de la sábana como conectadas con conceptos puramente formales tales como la diferenciabilidad de campos vectoriales, relacionados con la suavidad de la sábana, y la inyectividad de esos campos relacionada con la ausencia de arrugas. Pero, finalmente, aparece la inevitable definición que reproduce la Figura 36, y allí ya no quedan rastros de la sábana flotando sobre la cama: ahora solo hay lugar para regiones de tipo I o II, campos vectoriales y clases de continuidad, inyectividad de campos, independencia lineal entre vectores obtenidos por medio de derivadas parciales… y al final la superficie designada con K se ha transformado en la imagen a través de un campo vectorial de una región bidimensional del espacio, esto es K $\stackrel{\text{def}}{=}$ **f**(S), lo que cierra la definición.

Figura 36. La definición de *superficie*, del texto *Cálculo Vectorial*

Definición. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región del tipo I y del tipo II en $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{f}: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$, una función inyectiva de clase $\mathscr{C}^1$ (es decir, sus funciones coordenadas $f_1, f_2, f_3: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathscr{C}^1$), de modo que los vectores

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v}\right)$$

son linealmente independientes en todo (u, v) de S. A la imagen de la función $\mathbf{f}$, $K = \mathbf{f}(S)$, se le llama *superficie simple*. ■

Fuente: Pita Ruiz (1995, 823)

Puede verse aquí que la plataforma sobre la que se monta la definición está poblada de otros conceptos no menos abstractos, previamente definidos (algunos de ellos estudiados en este mismo capítulo), que ahora ya no intervienen como procesos sino solamente como objetos que sirven de soporte a una nueva definición; al fin y al cabo, tras las presentaciones de los objetos, la definición se reduce a decir que una superficie es **f**(S), lo que solo adquiere sentido para el lector que ya ha logrado encapsular como concepto todos los artefactos que intervienen en esa definición.

Una vez sentada la definición, se espera que el lector pueda concebir la superficie en los términos de imagen a través de un campo vectorial de una región compacta S. La correspondencia con el ejemplo puede ser explotada todavía, *a posteriori*, invitando al recorrido inverso entre los mundos: desde el mundo formal al mundo de las percepciones. Esta es precisamente la intención del autor en este párrafo:

> "El papel que desempeña la propiedad de inyectividad requerida para la función f es claro: no queremos que las superficies se *auto-intersequen*, es decir, no queremos que haya dos puntos distintos P_1, $P_2 \in S$, de modo que $\mathbf{f}(P_1) = \mathbf{f}(P_2) \in K$. (Nuestro ejemplo de la sábana libra automáticamente esta condición, ¿o no?)" (Pita Ruiz 1995, 823).

Como puede verse, el lector es interpelado acerca de cómo podría él observar en la imagen de la sábana el cumplimiento –o su violación– de la condición de inyectividad impuesta al campo; para lograrlo debe poner en correspondencia un concepto del mundo formal (la inyectividad) con una noción del mundo perceptual (la ausencia de arrugas), con la consiguiente ganancia en comprensión –que fuera postulada en el marco teórico de este capítulo– en estos vaivenes entre ambos mundos. En cambio, la presentación de las superficies del texto *Vectores y Tensores con sus Aplicaciones* (Santaló 1993), clásico en las carreras de ingeniería en la Argentina, se mantiene en el mundo simbólico, como resulta del análisis de la Figura 37: no hay apelación alguna a objetos familiares, el lenguaje se desarrolla en el plano formal de las funciones y los parámetros; más aún, las definiciones aparecen al mismo ritmo que el discurso, con el mínimo

Figura 37. Las superficies presentadas directamente en el mundo formal por Luis Santaló
Vectores y Tensores con sus Aplicaciones

1. Superficies. Versor normal. Supongamos un punto $\mathbf{X}$ cuyas coordenadas x, y, z sean funciones de dos parámetros u, v:

(1) $$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v) .$$

Representando por la misma letra $\mathbf{X}$ al vector OX cuyas componentes son las coordenadas x, y, z, las tres ecuaciones (1) se pueden condensar en la ecuación vectorial única

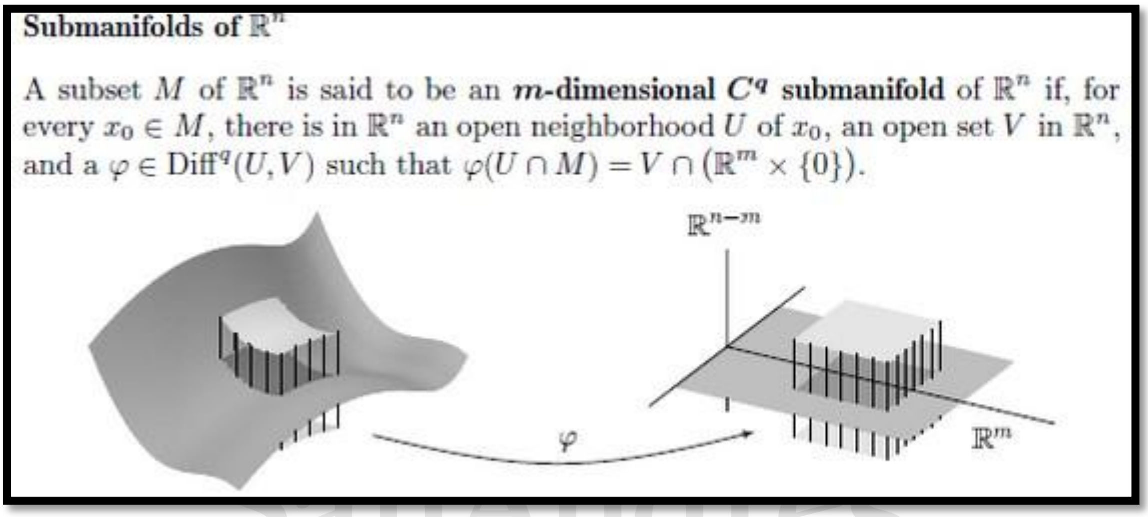
(2) $$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{I} + y(u, v)\,\mathbf{J} + z(u, v)\,\mathbf{K} .$$

Cuando u, v varían dentro de ciertos intervalos, el punto $\mathbf{X}$ describe una *superficie*, de la cual (1) son las *ecuaciones paramétricas* y (2) la *ecuación vectorial*.

Fuente: Santaló (1993, 143)

En algunas aplicaciones del análisis matemático, las superficies tal como han sido definidas por Pita Ruiz y Santaló, y que ya requieren una importante abstracción, pueden resultar demasiado 'concretas', surgiendo así un concepto todavía más amplio, el de las *variedades* o las *subvariedades* "Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es una m–*dimensional* C^q subvariedad de $\mathbb{R}^n$ si para todo $x_o \in \mathbb{R}^n$ hay en $\mathbb{R}^n$ un entorno abierto U de $x_{o,}$ un conjunto abierto V en $\mathbb{R}^n$ y una $\varphi \in \mathrm{Diff}^{\,q}(U, V)$ tal que $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$" (Aman y Escher 2008, 242), cuya presentación original se reproduce en la Figura 38.

Figura 38. Reproducción de la definición de variedades diferenciables tal como la presenta el texto *Analysis II*



Submanifolds of $\mathbb{R}^n$

A subset M of $\mathbb{R}^n$ is said to be an **m-dimensional C^q submanifold** of $\mathbb{R}^n$ if, for every $x_0 \in M$, there is in $\mathbb{R}^n$ an open neighborhood U of x_0, an open set V in $\mathbb{R}^n$, and a $\varphi \in \mathrm{Diff}^q(U, V)$ such that $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Fuente: Aman y Escher (2008, 242)

El nivel de abstracción es ahora tal que las superficies son apenas ejemplos de las subvariedades (bidimensionales); el nuevo concepto, en los términos del marco teórico, comporta una generalización en la medida que pasa a incluir un concepto previo como un caso del nuevo concepto. Pero también importa una abstracción, puesto que los restantes objetos que caen bajo el concepto son de naturaleza muy diversa, ya que las curvas, tal como fueron caracterizadas en el apartado 4.9, pasan a ser también un tipo de variedad (unidimensional), los conjuntos discretos de puntos de $\mathbb{R}^n$ son variedades (de dimensión nula). Esta simplificación desde el punto de vista puramente formal, que permite concebir tan diversos objetos como esencialmente iguales desde la perspectiva de las variedades no se traduce de modo alguno en una simplificación del acceso cognitivo a ese mundo formal.

Los textos que tratan el Cálculo en el espacio de variedades no están presentes en la bibliografía de los cursos de grado de ingeniería en la Argentina, pero sí se encuentran en el exterior, como es el caso del clásico “Cálculo de Variedades” del profesor Michael Spivak cuya definición de variedad se reproduce en la Figura 39.

Figura 39. Reproducción de la definición de Variedad *k*– dimensional en *Cálculo de Variedades*

Un subconjunto M de $\mathbf{R}^n$ se denomina **variedad k-dimensional** (en $\mathbf{R}^n$) si para cada punto $x \in M$ se cumple la siguiente condición:

(M) Existe un conjunto abierto U que contiene x, un conjunto abierto $V \subset \mathbf{R}^n$, y un difhomomorfismo $h: U \to V$ tal que

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^k \times \{0\}) = \{x \in V : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}.$$

Fuente: Spivak (1988, 101)

Comparando las definiciones de ambos textos, puede observarse como diferencia relevante la explicitación del carácter de la función que convierte la intersección del entorno con la variedad (designada con φ en el primer texto, *h* en el segundo): mientras en el primero se utiliza la notación “$\varphi \in \mathrm{Diff}^{\,q}(U, V)$”, en el segundo se dice que *h* es “un difhomomorfismo”. La segunda definición es un caso de la primera, por lo que esta implica una mayor demanda cognitiva. Una y otra suponen que el lector ya ha incorporado y transformado en un objeto manipulable el concepto de difhomomorfismo, cuya definición no se incluye en la selección presentada en la figura. No hay manera de sobrestimar el nivel de exigencia que esta abstracción supone, ya que no se le pide al lector solo que sepa qué es un difhomomorfismo (esto es una función diferenciable con inversa también diferenciable) sino en qué consisten sus propiedades fundamentales, de manera que pueda atender a los rasgos esenciales de las variedades sin detenerse, cada vez, a remontar las definiciones previas de diferenciabilidad. La elevada intensidad de la compresión operada a través de las definiciones se manifiesta de manera muy expresiva en el texto “Geometria Differenziale” cuya definición de variedad se reproduce con la tipografía y lengua original en la Figura 40: “Una *variedad* (*diferenciable*) de *dimensión* *n* es un conjunto *M* provisto de una estructura diferenciable de dimensión *n* que induce sobre *M* una topología de Hausdorff y tiene una base numerable”.

El “resumamos con la definición formal lo dicho hasta aquí” se refiere a cuatro páginas que contienen trece definiciones y observaciones (numeradas desde el 2.1.1 hasta el 2.1.13), hasta llegar a la definición 2.1.14. Cada uno de los términos de esta concisa definición es, de hecho, técnico, y ha sido definido previamente. De esta manera, la definición de tres líneas que se está leyendo, es un producto cuya concentración puede medirse en términos físicos de 60:1 (esto es el número de líneas que son resumidas por las tres líneas de la definición), pero difícilmente cuantificable en lo que hace a la compresión de las abstracciones previas.

Figura 40. Reproducción de la definición de variedad en *Geometria Differenziale*

Riassumiamo con la definizione ufficiale di varietà differenziabile quanto detto finora:

Definizione 2.1.14. Una *varietà (differenziabile)* di *dimensione* n è un insieme M provvisto di una struttura differenziabile di dimensione n che induce su M una topologia di Hausdorff e a base numerabile.

Fuente: Abate y Tovena (2011, 64)

4.11. Integrales múltiples

Ha quedado establecido en el marco teórico que la introducción al mundo formal en no pocas ocasiones conlleva una desorientación si no se aclara qué puede darse por sabido y qué debe ser inferido. En su texto *Cálculo Vectorial*, los autores Marsden y Tromba introducen las *integrales dobles* (1991, 310) diciendo que "para tener una comprensión intuitiva de la integral doble, supondremos de modo provisional que el volumen de una región ya ha sido definido", refiriéndose a la región reproducida en la Figura 41.

Figura 41. Una región 3D utilizada como partida de la definición de integrales dobles en recintos rectangulares; reproducción del texto *Cálculo Vectorial*

Supongamos que $f(x, y) \geqslant 0$ en R, de modo que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie sobre el rectángulo R. Esta superficie, el rectángulo R y los cuatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, y $y = d$ forman la frontera de una región V en el espacio (*véase* la Figura 5.1.1).

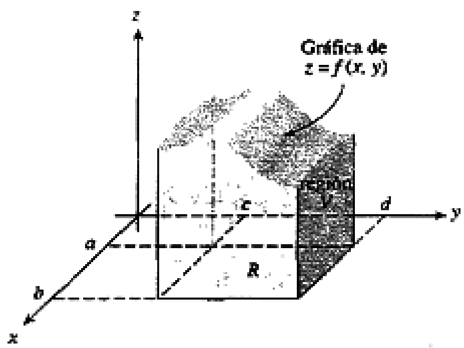
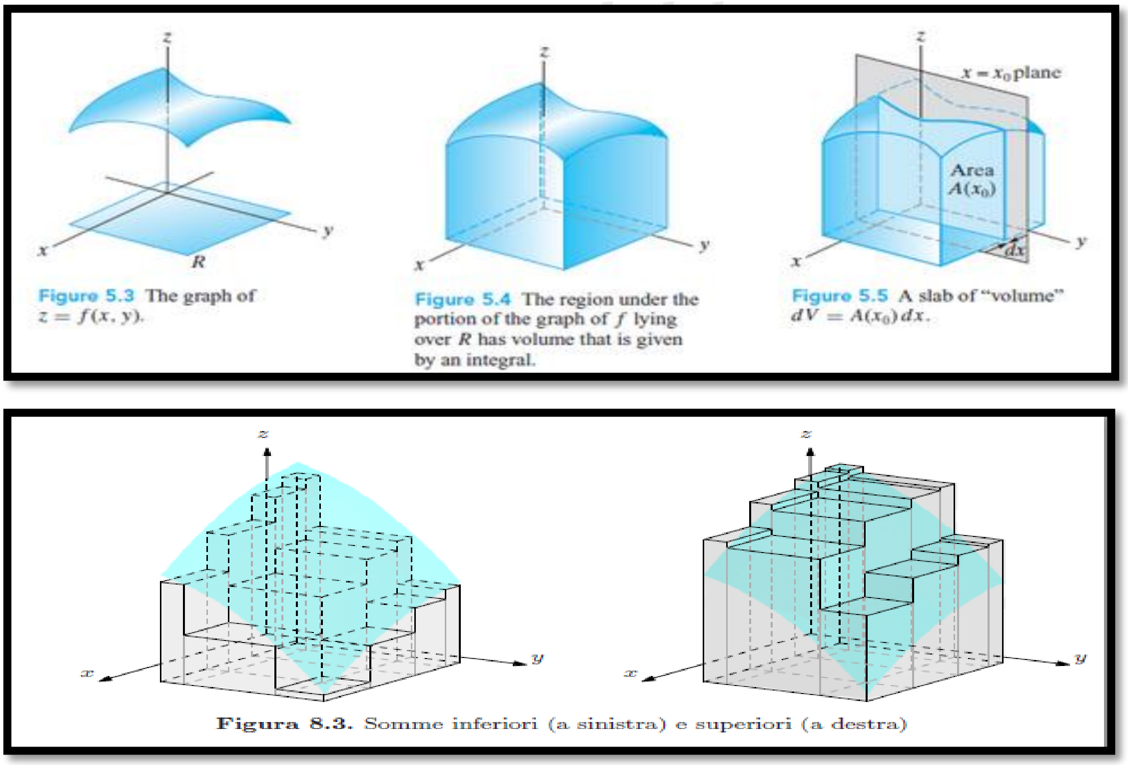


Figura 5.1.1. La región V en el espacio está acotada por la gráfica de f, el rectángulo R y las cuatro caras verticales indicadas.

Fuente: Marsden y Tromba (1991, 310)

Aquí se tiene la evidencia empírica de una situación corriente: para aproximarse a un concepto abstracto –la integral doble– los autores le apelan a que el lector dé por conocido lo que se denomina *volumen*. Lo que no deja de ser algo desconcertante, pues con el avance de las páginas, el lector deberá retroceder y caer en la cuenta que no es que haya un concepto simple llamado volumen del que pueda asirse para ascender al más abstracto, sino que, por el contrario, el volumen es un concepto derivado *a posteriori*, y de allí que la aproximación intuitiva es menos real que ilusoria. El lector, que tal vez había accedido desde el mundo perceptual a una interpretación de la integral doble, se ve pronto obligado a desestimarla como fundamento válido de su comprensión. En efecto, nueve páginas después el lector se encontrará con una línea que dice que “ya estamos preparados para dar una definición rigurosa de la integral doble como límite de una sumas. Esta se usará para *definir* el volumen de la región bajo la gráfica de la función *f* (*x*, *y*)” (Marsden y Tromba 1991, 319). La cursiva sobre *definir* está en la tipografía original, los autores quieren resaltar que no hay algo así como un volumen que preexista a la noción de integral, sino que por el contrario, es la noción de integral la que permite generar la de volumen.

Figura 42. Las aproximaciones geométricas a la integral doble en (a) el texto *Vector Calculus* (Colley 2012, 311) y (b) el texto *Analisi Matematica II*



Fuentes: Colley (2012, 311) y Canuto y Tabacco (2008, 310)

Estas consideraciones se aplican también a los dos textos siguientes: *Vector Calculus* de Susan Colley (2012, 311), y *Analisi Matematica II* de Canuto y Tabacco (2008, 310) cuya primera aproximación a las integrales dobles pasan por el volumen, como puede verse en la Figura 42 (a) se observa una secuencia que presenta primero la gráfica de un campo escalar suave no negativo, luego una región de la que se predica un volumen que se afirma resultará de una integral y en la tercera se intenta hacer plausible en el mundo perceptual que el volumen pueda resultar de una integral La advertencia de que el volumen no está definido *antes* de la integral llega al lector a través de las comillas al término volumen, como puede verse en el pie de la tercera ilustración de la derecha. La segunda parte de la misma Figura (b) muestra una apelación semejante del texto italiano. Las aproximaciones geométricas al concepto de integral doble, se caen –y deben entonces desmontarse– cuando se pasa a las integrales triples, donde si todavía es representable el recinto tridimensional donde ahora se integra, la gráfica de la función es tetradimensional. De allí en adelante, tampoco está disponible el recurso geométrico del recinto de integración, y la abstracción debe prescindir de esta geometría.

4.12. Integrales de superficie

El último concepto a relevar es doblemente exigente, dado que según que se integren campos escalares o vectoriales, resultan dos tipos de integrales de superficie con interpretaciones muy diferentes. Los tres textos bajo análisis (Apostol 1980, Marsden y Tromba 1991, Santaló 1993) apelan en el inicio a la noción intuitiva de área de una superficie, para luego *definirla* en el terreno formal.

El concepto de *integral de superficie* concentra en sí mismo por lo menos dos de los conceptos ya analizados (el de *integrales dobles* y el de *superficies*), puesto que la definición procede a través de la conversión del recinto de integración (la superficie sobre la que se integra) en un recinto plano; esa conversión es lograda mediante un factor de escalas superficiales que se construye mediante las parametrizaciones de la superficie. La Figura 43 muestra el modo en que Marsden y Tromba (1991, 469) pretende subrayar este desplazamiento de recintos de integración: una figura junto a la definición que ilustra en el plano gráfico lo que en el enmarcado superior se expresa en el mundo simbólico.

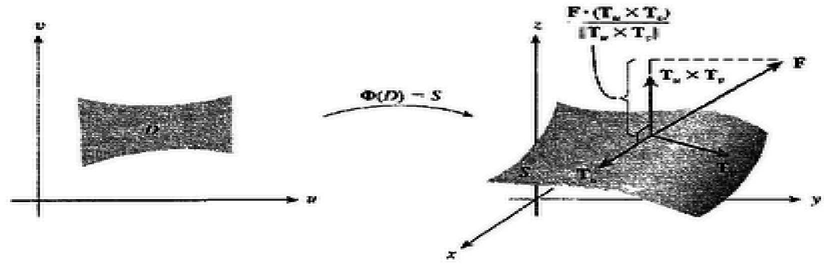
Figura 43. La integral de superficie de un campo vectorial, en el texto *Cálculo Vectorial*

DEFINICIÓN: La integral de superficie de un campo vectorial Sea **F** un campo vectorial definido sobre S, la imagen de una superficie parametrizada Φ. La ***integral de superficie*** de **F** sobre Φ, denotada por:

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

se define por (*véase* la Figura 7.6.1):

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv.$$



Fuente: Marsden y Tromba (1991, 469)

Se observa además la preocupación de distinguir entre el significante elegido para el concepto y la definición misma de ese símbolo, que aparece en la última igualdad. El lector del texto debe leer esa igualdad como la pareja (*definiendum* $\stackrel{\text{def}}{=}$ *definiens*) y asegurarse que el *definiens* se halle ya como un objeto reconocible: el proceso por el que se define requiere como alimentación de entrada un objeto ya encapsulado en abstracciones previas.

Figura 44. Integrales de superficie en *Vectores y Tensores con sus Aplicaciones*

5. Integral de superficie. Sea una superficie S de ecuaciones paramétricas

(41) $\quad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$

Se llama *integral de superficie* de una función $\varphi(x, y, z)$ extendida a una región D de S, a la expresión

(42) $\quad \int_D \varphi\, d\sigma = \int_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$

6. Flujo. Sea S la misma superficie (41) del número anterior y $\mathbf{A}(x, y, z)$ un campo de vectores.

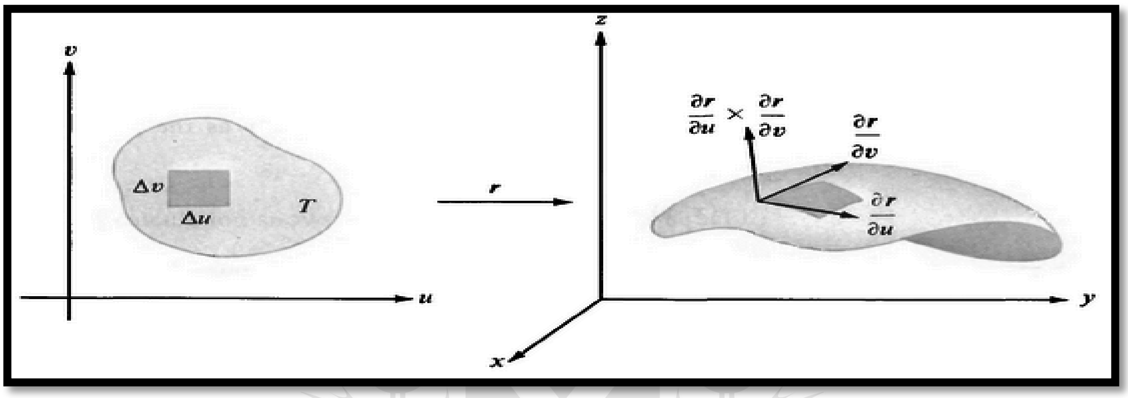
DEF. 2: Se llama *flujo* del vector **A** a través de la región D de la superficie S, a la integral de superficie

(43) $\quad \int_D \mathbf{A}.\mathbf{N}\, d\sigma .$

Fuente: elaboración propia sin alteración de la secuencia de las definiciones (Santaló 1993, 153-154)

El texto *Vectores y Tensores con sus* Aplicaciones de Santaló (1993, 153-154), como se observa en la Figura 44, no hace un lugar especial a la integral de un campo vectorial (la segunda definición), sino que la presenta como un ejemplo más de la del primer tipo, bastando para ello pensar que lo que se integra es un campo escalar: la componente normal del campo vectorial. Se tiene aquí un ejemplo de la definición de un objeto que apunta más a su aspecto de proceso; no es tan sencillo para lector seguir teniendo la integral del campo vectorial –el flujo– como un concepto de naturaleza distinta al primero, si en la definición misma ya está operando la transferencia de sus rasgos de objeto a los del proceso mediante el cual podría ser calculado.

Figura 45. Un soporte visual para la integral de superficie en *Calculus II*



Fuente: Apostol (1980, 514)

El texto de *Calculus. Volumen II* de Apostol (1980, 514) recurre, como se ve en la Figura 45 al registro gráfico para hacer plausible la definición que cuatro páginas después presentará diciendo que "esta observación sugiere la siguiente definición" (518). Se observa aquí un interés del autor por permitirle al lector ver la definición como algo bastante natural, suponiendo que ya ha aceptado que –como muestra la parte derecha de la figura– la superficie puede recubrirse de pequeños tejados planos cuyas áreas habrán de ser sumadas para calcular la de la superficie curva que recubren. Las definiciones son, desde luego, arbitrarias, pero solo sobreviven aquellas que resultan plausibles en arreglo a algún sistema previo y con vistas a ser objetivada como insumo para desarrollos ulteriores.

4.13. Observaciones finales de nivel global

Tras el recorrido por cada una de las celdas de la matriz Textos-Conceptos MTC, pueden generalizarse algunas observaciones, producidas ahora por la mirada panorámica a la matriz en conjunto. Los puntos analizados anteriormente han permitido un análisis *inter-textual* comparativo *local* entre los textos habitados por la misma columna (y entonces, tratando el mismo concepto). Los resultados obtenidos sirven ahora como objetos de entrada para un análisis global de la naturaleza de la abstracción *inter-conceptual* e *inter-textual* pero de carácter global. También en este apartado se trata de regresar a la población de conceptos y de textos, invirtiendo los filtros que produjeron la muestra mediante las correspondientes inferencias estadísticas.

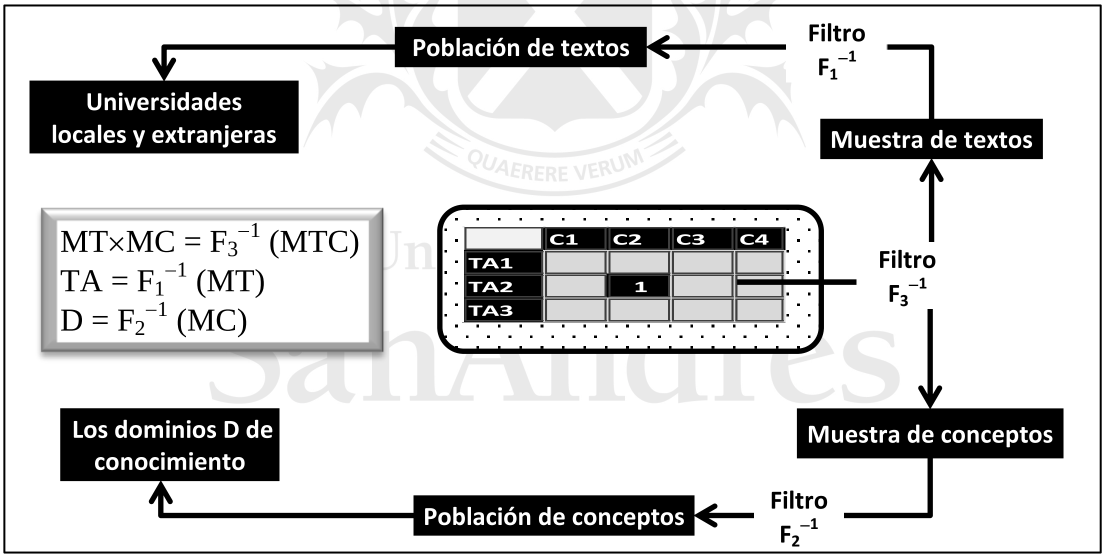
La evidencia recogida en los libros de texto es consistente con las características esenciales de la abstracción en el nivel universitario delineadas en el marco teórico, y se presenta con una intensidad regular que no reconoce discontinuidades marcadas a través de los conceptos ni a lo largo de los textos. En resumen, la abstracción denominada *teórica*, la necesidad de encapsular los procesos en objetos, la elevada compresión de las definiciones, la centralidad de las relaciones entre los objetos antes que los objetos mismos; todos estos rasgos se mantienen relativamente estables cuando se pasa de un concepto a otro, o de un texto a otro. No se presenta como un atributo de tal o cual concepto sino que es compartida por todos. Esa relativa estabilidad no implica, sin embargo, que la abstracción en el nivel universitario sea plana y no reconozca, ya dentro de esa categoría y sin variar su naturaleza, diferencias de grados. Así, no es difícil reconocer la diferencia, como se estableció en su lugar, entre el grado de abstracción que supone una *superficie* y el que demanda una *variedad*: el segundo no solo comprende al primero, sino que unifica la visión y el tratamiento de las superficies y las curvas como un solo objeto al que le son aplicables resultados importantes como los teoremas integrales.

En lo que respecta a la presentación misma de los conceptos, los resultados no confirman los atributos que algunos teóricos del AMT adjudican a los libros de texto en lo que respecta a las definiciones: son presentadas –afirman– como si fuesen suficientes para que el lector construya a partir de ellas el concepto que se está definiendo. No se encuentra que este rasgo pueda predicarse de textos sin discontinuidades, y los saltos no son pequeños ni infrecuentes. No todos los autores tienen la confianza en la definición detectada en los textos que rechazaba el editor del *The American Mathematical Monthly* y que presentaban la definición de gato antes de mostrar gato alguno (Boas 1981, 727). Los resultados de este capítulo no avalan afirmaciones como la siguientes: “desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto […] dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones” (Azcárate Giménez y Camacho Machín 2003, 141), ni que “muchos textos de clase están basados parcialmente en las siguientes hipótesis: (1) los conceptos se adquieren principalmente por sus definiciones…” (Vinner 1991, 65).

No todos –ni tampoco la mayoría– los textos responden a estas caracterizaciones, sino que, más bien, puede observarse una preocupación por ofrecer diversos registros de representación que van conformando los perfiles del objeto que finalmente quedará cristalizado en la definición. La intención pedagógica de los autores resulta entonces documentada y visible. Puede tomarse como caso el libro de Strang (identificado como TA27 y analizado en el apartado 4.1 de este capítulo). Su texto puede verse como un ir y venir a través de los tres mundos de la matemática, y está muy cercana al proceso de abstracción descripto por los mismos teóricos del AMT: "trabajar con una representación simple, trabajar con varias representaciones en paralelo, relacionar las representaciones en paralelo, integrar las representaciones y sus intercambios" (Dreyfus 1991, 39). En efecto, en la primera página escribe "el libro comienza con un ejemplo que es familiar a todos los que conducen un vehículo" (Strang 2009, 1), lo que yace de modo pleno en el mundo incorporado. De allí en más aparecen múltiples en paralelo representaciones diversas: gráficos, tablas, diagramas con flechas, expresiones simbólicas, figuras decorativas…que empiezan luego a conectarse también en diversos planos. Por ejemplo, se reproduce una figura del velocímetro y cuentakilómetros para relacionar los conceptos de distancia recorrida y velocidad. Se suceden ejemplos con el automóvil yendo hacia adelante y hacia atrás que se correlacionan con los gráficos y el registro simbólico. Y finalmente se arriba a la definición de función, tras recorrer cinco páginas de esas múltiples representaciones, desplazamientos e intercambios entre ellas. El caso del texto de Strang no es una excepción en la muestra analizada, sino que participan de sus características –en mayor o menor medida– los textos que se han identificado en este estudio como TA3 (Anton, Bivens y Davis 2012), TA4 (Apostol 1967), TA5 (Apostol 1980), TA8 (Colley 2012), TA9 (Courant y John 1999b), TA10 (Courant y John 1974), TA11 (Ghorphade y Limaye 2006), TA13 (Hairer y Wanner 1996), TA14 (Kudriávtsev 1984), TA17 (Marsden y Tromba 2003), TA18 (Marsden y Tromba 1991), TA19 (Pita Ruiz 1995), TA24 (Simmons 2011), TA26 (Spivak 1994), TA27 (Strang 2009). La lista anterior contiene catorce títulos, lo que constituye la mitad de la muestra obtenida aleatoriamente; este resultado contrasta con las afirmaciones señaladas, que dicen que "la cultura dominante de la enseñanza de la matemática presenta a los estudiantes productos terminados usando el lenguaje abstracto de los símbolos […] modelo promovido en los libros de texto" (Kinard y Kozulin 2008, 107). La muestra obtenida tiene una proporción p_m = 50 % de textos a los que no les aplicable esa afirmación; ¿qué puede decirse de esta proporción para la población total de 56 textos?

En primer lugar, dado el modo aleatorio en que fue construida la muestra, la composición de la población pude suponerse no sesgada en sus atributos respecto de la muestra, por lo que pueden aplicarse las técnicas corrientes de inferencia estadística para hacer una estimación del valor *p* correspondiente a la población. Así resulta que la afirmación de que la población tiene una proporción entre el 46% y el 54% de textos sobre los que sí hay un tratamiento en registros múltiples puede hacerse con un nivel de confianza del 99.5%, o en otro lenguaje, el intervalo (0.46, 0.54) es un intervalo de confianza de nivel 99.5% para la proporción *p* de la población[17]. La Figura 46 ilustra el proceso de transformación de los hallazgos sobre la muestra a las estimaciones sobre la población.

Figura 46. La marcha inversa del esquema metodológico recorrida a través de inferencias estadísticas desde las muestras aleatorias hasta las poblaciones originales



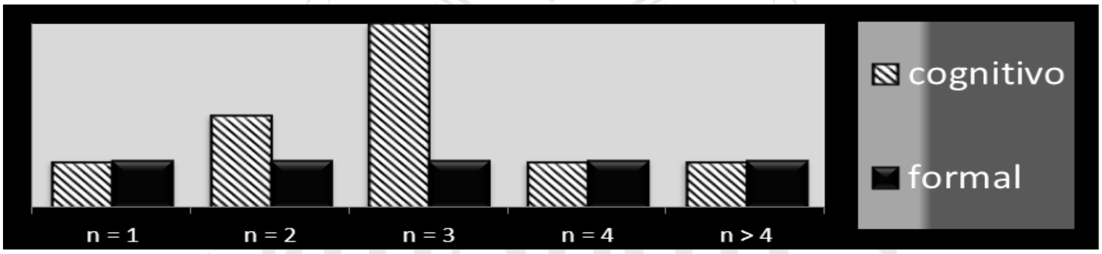
Fuente: elaboración propia

Un hecho remarcable como resultado general, aplicable a la mayoría de los textos de la muestra, es que el ascenso entre niveles de abstracción en muchas ocasiones opera sin un reconocimiento de que ello implique mayores demandas cognitivas. La ventaja de operar en planos de abstracción más elevados para abarcar un número mayor y más

[17] Para ello basta crear con los resultados obtenidos un evento con probabilidad muy próxima a 1, por ejemplo γ = 0.995. Si se hace $\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \{np - k\sqrt{(npq)} < n_s < np + k\sqrt{(npq)}\}$con n_s el número de casos en que el texto cumple la condición, k el percentil de nivel γ y *n* el número de veces que se repite el examen de una muestra del texto, *p* el parámetro a determinar y $q = 1-p$, se sabe que es $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \gamma$, y utilizando como estimador puntual de *p* el valor p_m resulta que $\mathcal{P}\{p_1 < p_m < p_2\} = \gamma$ con p_1 y p_2 raíces de la ecuación $n(p-p_m)^2 = k\,p\,q$. De allí resulta el intervalo de confianza (p_1, p_2) de nivel γ (Papoulis 1990, 236-237).

heterogéneo de objetos, unificando así las teorías, no se alcanza sin un costo para incorporar lo que antes eran procesos a la categoría de meros objetos a introducir en procesos superiores. Las definiciones que se asientan en esos niveles tienen la ventaja de poder ser escritas en un lenguaje que no necesite establecer las diferencias que serían imprescindibles en niveles inferiores. Que esa unificación de escritura no procede insensiblemente en el lector es lo que parece ser pasado por alto en no pocas ocasiones en los textos analizados. Puede servir de ejemplo –representante de los otros con el mismo rasgo– el texto TA14 (Kudriávtsev 1984), analizado en 4.8, en que el autor declara expresamente que una discusión acerca del número de variables del campo escalar no añade complejidad al problema de los extremos. Lo que en realidad sucede es que no añade ninguna dificultad a la escritura de la definición en el lenguaje de entornos, pero de allí no se sigue que tampoco haya diferencia en las representaciones que el lector deba hacerse de un caso u otro, como tampoco se sigue que el proceso de cálculo de los extremos no cambie radicalmente.

Figura 47. La separación entre la dimensión cognitiva y la formal en la abstracción al variar la dimensión del espacio en el que se definen los conceptos



Fuente: elaboración propia

Las dificultades introducidas por los cambios de dimensión han quedado debidamente presentadas en el marco del AMT y tienen una intensidad tal que para los lectores “prueban ser dificultades intolerables […] especialmente cuando se pasa de dimensión dos a tres” (Eisenberg 1991, 150). La Figura 47 sirve para ilustrar esquemáticamente este fenómeno: mientras la escritura formal no toma en cuenta la dimensión, las demandas cognitivas crecen con la dimensión; una vez que el lector ha logrado acomodarse al plano formal, las demandas se estabilizan.

Algunos autores llaman la atención explícitamente acerca de estos saltos, como es el caso del texto *Geometrical Vectors* (Weinreich 2013) como puede verse en la Figura 48, que además de establecer correspondencias entre los mundos, advierte que algunos conceptos no tienen asociado un sustrato fuera del espacio formal.

Figura 481. Correspondencias (y sus ausencias) entre objetos formales y perceptuales, señaladas en el libro de texto *Geometrical Vectors*

PICTORIAL	*FORMAL*
arrow	contravariant vector
stack	covariant vector
sheaf	contravariant vector density
thumbtack	covariant vector capacity
?	scalar
swarm?	scalar density
?	scalar capacity

Fuente: Weinreich (2013, 48)

Para todos los conceptos analizados, la naturaleza de la abstracción se ubica plenamente en la zona de la abstracción teórica (tal como se presenta en el apartado 2.1 de este capítulo), y los conceptos mismos son, (en el lenguaje de Cassirer) del tipo de *concepto-relación*, que no proceden de una abstracción empírica como los *concepto-cosa*, sino que son construidos en la misma definición. Tómese, por ejemplo, el concepto de función, el primero de los estudiados en 4.1: no se trata de hallar algo en común entre una batería de objetos y separar ese rasgo para establecer la definición; por el contrario el concepto tiene un origen relativamente reciente – siglo XIV la versión arcaica de Oresme– a la que no se llegó sino tras un intrincado camino en la historia de la matemática en los que solo al principio pueda hablarse de una abstracción empírica, pero en cualquier caso combinada con una abstracción teórica (G. Schubring 2012, G. Schubring 1987, D'Hombres 1984, Dahan-Dalmedico y Pfeiffer 1986). Si esto puede decirse del concepto de función, con no menos razón puede predicarse de aquellos que la utilizan como objeto o como sujeto: límite, continuidad, derivadas, integrales… Si esto puede decirse de la muestra de conceptos estudiados, por las mismas razones de aleatoriedad y con los mismos métodos ya detallados, puede decirse que en para la población de conceptos, la abstracción de naturaleza teórica que genera los conceptos está presente en al menos el 91% de los casos con una probabilidad del 99.5%. Como, por otra parte, se aceptó que los conceptos del álgebra lineal y del cálculo en variable compleja importaban un nivel de abstracción por lo menos similar al del cálculo en variable real, la afirmación resulta aplicable igualmente a los tres dominios de conocimiento.

El panorama final que resulta de los datos analizados a lo largo de este capítulo, muestra entonces una regularidad a través de los conceptos y de los textos del tipo de abstracción, una variación en cuanto a los niveles de esas abstracciones al recorrer los conceptos, y una variación mayor en la utilización de recursos de representación en diferentes niveles semióticos, cuando se recorren los textos. Las decisiones que los autores toman para la presentación de las abstracciones con las que sus lectores se habrán de enfrentar son de gran diversidad y elevada amplitud. La validez de estas conclusiones se sostiene tanto para los textos de uso local como para los que son solo de uso en el extranjero.

El siguiente capítulo recorre un concepto –o mejor, tal vez sería decir un nombre– a través de los textos y analiza en profundidad la cuestión de la intertextualidad mencionada al pasar en el desarrollo de este capítulo. Las preguntas ya no son respecto al tipo o grado de abstracción, sino a la estabilidad de un concepto ante las variaciones de los textos.

CAPÍTULO 5

INTERTEXTUALIDAD MATEMÁTICA

1. Introducción

Los libros de texto universitarios se encuentran entre los objetos que se espera sean incluidos en las actividades del alumno ingresado a la vida universitaria; su lectura, sin embargo, está estrechamente vinculada a la comunidad textual en la que adquiere significados al compartir textos y contextos muy específicos. Desde esta perspectiva, la extrema dificultad que los textos ofrecen a los alumnos en los primeros tramos de su carrera, proviene menos de una falta de formación previa que de la diferencia entre estas lecturas y las que previamente pudieron tener lugar. Los estudiantes se "enfrentan a una nueva cultura o comunidad textual que les exige leer textos muy distintos y de una forma diferente a la que estaban habituados" (Mateos 2009, 112), a lo que se añaden los problemas que presenta la *intertextualidad* que proviene de la necesidad de leer más un texto, lo que constituye "una tarea cognitivamente muy demandante, ya que exige no sólo reconstruir los múltiples significados o las múltiples voces que pueden encontrarse en los distintos textos, sino construir un significado propio o una voz propia que las integre a todas ellas" (Mateos 2009, 112).

El concepto de intertextualidad, asociado tradicionalmente a disciplinas que exigen una amplia actividad hermenéutica, ha resultado también pertinente a disciplinas de naturaleza formal. Se entiende por intextualidad matemática en este capítulo al fenómeno por el cual tanto un concepto matemático como las relaciones en las que interviene ese concepto pueden adquirir significados y formas diversas según el contexto en el que se hallen sumergidas. Este capítulo prueba la pertinencia del fenómeno de intertextualidad en la matemática avanzada, mediante la elección de un concepto que en el Cálculo Vectorial se estudia en sí mismo y como argumento de entrada de nociones más complejas. El concepto seleccionado es el de *curva*, elegido por situarse en un nivel de complejidad suficientemente simple como para no requerir un tratamiento necesariamente topológico, a la vez que lo bastante complejo como para necesitar y admitir más de una representación como vía de acceso a su definición.

Una vez seleccionado el concepto, la medida en que la intertextualidad debe ser tenida en cuenta se puede manifestar planteando dos preguntas: (1) ¿Las definiciones y el tratamiento de las curvas dado por los distintos libros de texto universitarios usados en carreras de ingeniería en la Argentina y en el mundo se refieren a un mismo objeto?

(2) ¿Esta variedad puede afectar el valor de verdad de una proposición? Una respuesta afirmativa a la primera pregunta resultaría consistente con una concepción de la solidez de los conceptos matemáticos que, de hecho, implicaría negar la intertextualidad. Una respuesta negativa a la segunda salvaría la misma interpretación ahora referida a la lógica misma: las proposiciones, en tanto son proposiciones, son verdaderas o falsas por su misma definición, y este valor de verdad no es dependiente del sujeto que las enuncia ni del individuo al que le toca juzgarla. Por el contrario, respuestas opuestas a estas expectativas, obligarían a reconsiderar el peso que la composición de la bibliografía de una asignatura pueda tener sobre los mismos contenidos curriculares que son presentados en los diversos textos y a discutir y analizar las diferencias.

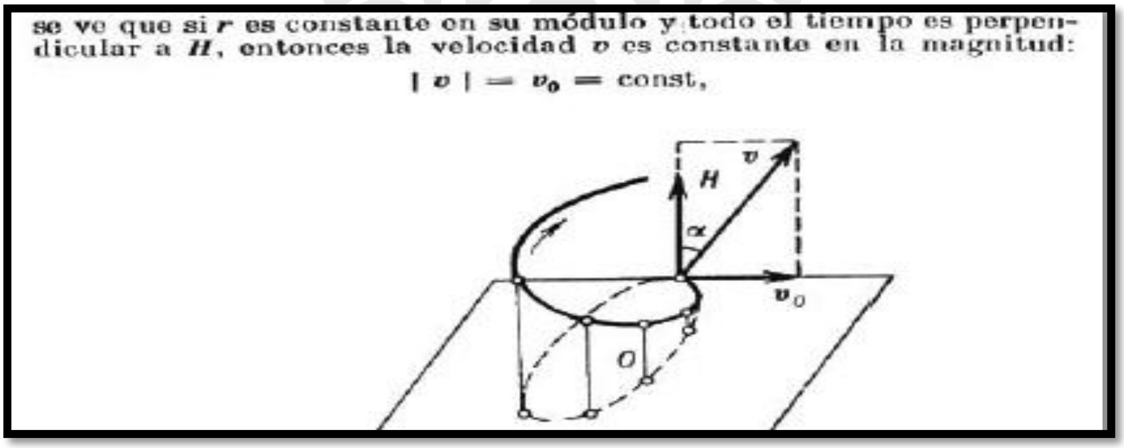
Este capítulo produce la prueba que permite responder a ambas preguntas, en el marco teórico del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) y mediante técnicas propias del análisis de contenido, aplicadas sobre 59 libros de texto: la totalidad de la población de 33 libros incluidos en la bibliografía corriente de las facultades de ingeniería en la Argentina y una muestra de 26 textos no citados en el país. Se analizan las definiciones a través de cuatro componentes identificadas como constituyentes de la intensión de un concepto específico que está presente en el cálculo vectorial y la geometría diferencial: *curva*. .

Las nociones esenciales del marco teórico general, recortadas para este capítulo se presentan brevemente en la sección 2 que tiene tres partes; la primera recobra lo fundamental acerca de las definiciones, la segunda destaca la intensión de una definición abstracta, y la tercera muestra un sucinto panorama de la evolución de esas definiciones. En la sección 3 se presenta la población y las muestras de textos, exhibiendo los métodos con los que se recogen los datos para generar las matrices de análisis. La última sección presenta los resultados organizados en las matrices de intensión, los aspectos descriptivos y los dos impactos –cognitivo y lógico– de la interactividad matemática, con una discusión de esas consecuencias.

2. Marco Teórico

Este capítulo trata los libros en un sentido restringido del término. La magnitud de la restricción puede estimarse desde la aproximación teórica iniciada por Roger Chartier (Chartier 2005b, Chartier 2002, Chartier 2007), que establece una distinción entre (a) el texto, en tanto contenido sustancial del que el lector se apropia; (b) el libro como soporte material del contenido, y que llega a las manos del lector; (c) la lectura, considerada como el conjunto de modos, prácticas y usos o apropiaciones que el lector hace del contenido textual que encuentra en el libro material cuyas páginas recorre. Este trabajo está centrado en el texto mismo (a), con escasa referencia al soporte escrito (b), y ningún estudio de los procesos de lectura efectivamente verificados (c). Para esos procesos de lectura se presume como justo el comentario de un teórico del pensamiento de matemática avanzada: "al abrir un texto de matemática avanzada al azar, aparecerá por lo general una página de símbolos y expresiones. Los estudiantes con frecuencia escudriñan la página para ver si los símbolos y fórmulas les son familiares, pero a menudo les resultan extraños y pronto se dan cuenta que tendrán un tremendo trabajo para comprender lo que está escrito" (Eisenberg 1991, 148). La Figura 1, que muestra un fragmento de este tipo de textos podría servir de ilustración. Parte de ese 'trabajo tremendo' se encuentra en las definiciones.

Figura 1. Fragmento del libro de texto *Análisis Vectorial* que ilustra la afirmación de que los lectores "tendrán un tremendo trabajo para comprender lo que está escrito"


se ve que si **r** es constante en su módulo y todo el tiempo es perpendicular a **H**, entonces la velocidad **v** es constante en la magnitud:

$$|\mathbf{v}| = v_0 = \text{const},$$

Fuente: *Análisis Vectorial* (Krasnov, Kiseliov y Makárenko 1989, 25)

2.1. Las definiciones

En términos muy generales, una definición es una demarcación que fija los límites o las fronteras que permiten recortar un objeto (cualquiera sea su naturaleza), establecer sus fines, circunscribirlo, destacarlo respecto de los demás objetos, sentido que concuerda con el etimológico: *de* 'hacia afuera' + *finire* 'delimitar' (Gómez de Silva 1998, 211). Este es el sentido que concibe a la definición como una negación, ya que toda delimitación de un objeto frente a otros equivale a negarlos para sólo dejar, en términos abstractos, aquél objeto que quiere definirse. La definición es cada vez más considerada como una operación que tiene lugar en el plano lingüístico. Entre las diversas clases de definiciones, en particular interesa en la matemática la definición formal, que se limita a indicar las relaciones que un dado objeto tiene con otros en un espacio sujeto a ciertas leyes que conforman un sistema denominado 'estructura'. En este tipo de definiciones, los nuevos conceptos son introducidos y definidos implícitamente por su relación con objetos previamente determinados.

Uno de los criterios de demarcación entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado establecido por la corriente del Pensamiento Matemático Avanzado (AMT por sus siglas en inglés) es el tratamiento que reciben los objetos de estudio a través de sus delimitaciones. En el primero, son especificados mediante una suerte de descripción por sus rasgos más notables, mientras que en el campo universitario los objetos son *definidos*, y sus propiedades se construyen a partir de las definiciones (Tall 1988, 1-6). El carácter de ciencia *formal* de la matemática le viene precisamente de la naturaleza de los objetos definidos, que no son cosas ni procesos, sino "formas en las que se puede verter un surtido líquido de contenidos, tanto fácticos como empíricos" (Bunge 2009, 13). En estos términos, el surtido líquido vaciado en el molde del término *curva* resultaría bastante heterogéneo cuando se releva a lo largo de diversos libros de texto.

En los libros de texto las definiciones exigen procesos de pensamiento sometidos a una elevada compresión para convertirlos en conceptos, en niveles de compresión sin equivalentes en el lenguaje natural, generando demandas cognitivas sobre los estudiantes que no tienen correlato con las que le producen a un matemático entrenado en la práctica común de la lectura de esos textos. Por otra parte, esa demanda no se mantiene constante, sino que crece en intensidad a medida que se progresa en la lectura de un dado texto, porque la prosa matemática procede comprimiendo y condensando los conceptos dejados atrás para generar nuevos El lector, entonces, debe ligar constantemente los términos que aparecen con otros previamente definidos o tomados como primitivos: "Una definición es una declaración de que un cierto símbolo o combinación de símbolos introducidos significa lo mismo que otra combinación de significado previamente conocido" (Whithehead y Russell 1997, 11)[18]. Las definiciones en matemática en esta concepción quedan vinculadas a los símbolos mismos, no con lo que ellos simbolizan, son independientes de cualquier interpretación o referente real que pudiesen tener; por el mismo motivo, no resultan verdaderas o falsas, dado que no son

[18] El texto original dice "A definition is a declaration that a certain newly-introduced symbol or combination of symbols is to mean the same as a certain other combination of symbols of which the meaning is already known"

proposiciones. Solo debe pedírseles que el objeto que pretenden definir quede unívocamente determinado.

2.2. Abstracción, extensión e intensión

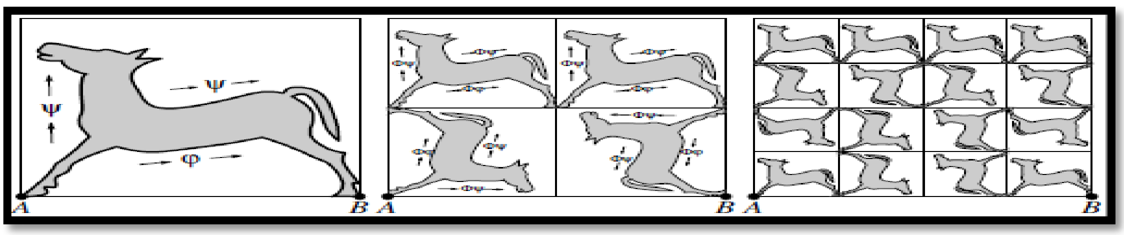
En el capítulo anterior se ha distinguido entre la generalización (proceso que subsume un caso en una regla) de la abstracción (proceso que introduce implícitamente una generalización pero de argumentos antes que de atributos). Una parte de la distinción y las dificultades cognitivas implicadas se expresa en el lenguaje de *extensión* e *intensión*: “la intensión indica *por qué* se aplica un término a un conjunto de objetos; el conjunto de objetos *al cual* es aplicable constituye su extensión” (Cohen y Nagel 2000b, 45), según que un concepto sea considerado como una clase compuesta de objetos o bien como un conjunto de propiedades que determina cuáles objetos es lícito considerar incluidos en la clase, respectivamente.

2.3. La trayectoria de las curvas

Si la definición desempeña el papel esencial que los teóricos del AMT le asignan, se comprende que este trabajo dirija su atención a cómo se objetivan estas definiciones, en un caso específico, la *curva*. Bertrand Russell (1988, 12) recuerda que un concepto tan primario como el del número 2 es la cristalización de un largo proceso histórico que queda oculto por el pulido del lenguaje matemático. El concepto de curva, lejos de ser la excepción, es un claro ejemplo de que no siempre la definición logra emerger limpia de la carga semántica que el tiempo pudo haber depositado en su recorrido, del que se toma en este apartado una nota sumaria desde sus comienzos con Euclides, que concebía una curva como la trayectoria de un punto móvil o la frontera de una superficie, siempre como un objeto unidimensional. Desde entonces, el concepto ha atravesado por precisiones sucesivas en un recorrido muy lejos de ser lineal, recordando lo que el profesor Gert Schubring del Institut für Didaktik der Mathematik (Universität Bielefeld) señala como el “peso ejercido por las tradiciones en la conformación de los conceptos clásicos, en las actitudes hacia los conceptos, y en los valores epistemológicos atribuidos a los conceptos […] que confirma la tesis de que los conceptos matemáticos tienen una historia cultural (2012, 601).

Hablando en general, la matemática en la Grecia clásica y helenística concebía las curvas de dos maneras, una estática como intersección de una superficie con un plano y una cinemática como el recorrido de un punto que se mueve en el plano (Rovenski 2010, Anglin 1994). Ambos casos remiten a un conjunto de puntos obtenido por una operación mental que no se liga a un –entonces inexistente– sistema de coordenadas, sistema con el que Descartes y Fermat en el siglo XVII originarían la geometría analítica, que se generalizó al espacio de modo sistemático con Clairaut y Euler en el XVIII, introduciéndose la geometría diferencial que se desarrollaría intensamente con el progreso del rigor introducido en el Cálculo a partir del siglo XIX. (Boyer y Merszbach 1989, Ríbnikov 1991). En este intenso proceso de creciente abstracción, se advirtió que las ideas intuitivas de *curva* debían precisarse al extremo para protegerse de sorpresas del tipo de las introducidas por la curva de Peano y la curva de Hilbert hacia fines del XIX (Hairer y Wanner 1996, 291-292). Este producto final es recogido y filtrado por los autores en las definiciones de sus libros de texto, listados en la siguiente sección. Con alguna simplificación, puede decirse que las definiciones son de tres tipos, según que el referente de *curva* sea: (a) una función vectorial; (b) un conjunto de puntos; (c) un par ordenado de una función vectorial y un conjunto de puntos. Se observa que ninguna de las definiciones detalladas deja fuera las curvas que desafían la noción intuitiva, como las construidas por Peano hacia 1890 y Hilbert al siguiente año: una curva continua que pasa por cada uno de los puntos de un cuadrado. Esta curva causó, entre los matemáticos de la época, el mismo efecto que una bomba "une courbe continue qui passe (plusieurs fois en général) par chaque (sic!) point d'un carré a fait l'effet d'une bombe" (Postnikov 1988, 198).

Figura 2. Una secuencia de construcción de la curva de Hilbert: cada punto del cuadrado yace sobre la curva, y la curva es continua. Es un conjunto bidimensional



Fuente: *Análisis by its History* (Hairer y Wanner 1996, 292)

La curva se constituye como el límite de un proceso que solo involucra curvas que sí ajustan la noción intuitiva de curva, objetos de dimensión uno y de área nula –como la silueta del caballo en la Figura 2– pero la curva límite con la asombrosa propiedad de que cada punto del cuadrado es un punto de la curva, es ya un objeto bidimensional y su área es la del cuadrado que 'llena', como lo prueba cualquier texto elemental (Ball 2013, 72). El aspecto constructivo de esta curva de Hilbert[19] puede observase en la Figura 2 (Hairer y Wanner 1996, 292). El atributo que la intuición asigna a una curva de ser 'de una dimensión'' es el que se desmorona con las curvas de Peano y de Hilbert, ambas continuas pero 'llenando' la superficie completa de un cuadrado. Esta curva pertenece a la clase de objetos matemáticos que muestra las limitaciones de lo que podría llamarse 'intuición geométrica' (del mismo tipo son las superficies de una sola cara, los números transfinitos, la curva de Cantor que hace corresponder biunívocamente un segmento con todos los puntos de un cuadrado). Es uno de los ejemplos que ha permitido a Mario Bunge decir que la intuición sensible y la intuición geométrica "hoy tienen pocos defensores en la matemática, porque se ha demostrado de una vez por todas que son tan engañosas lógicamente como fértiles heurística y didácticamente" (Bunge 1996, 60).

Si se quiere evitar que curvas de este tipo 'interfieran' debe cargarse la definición de curvas de requisitos que las dejen fuera, lo que suele hacerse añadiendo condiciones sobre las funciones vectoriales que *determinan* las curvas (o las funciones vectoriales que *constituyen* las curvas mismas, según el libro de texto que se esté leyendo, como se verá en el apartado siguiente). Los refinamientos que llevan a restringir el tipo de funciones que se consideran admisibles para definir una curva han llegado a ser bastante más elaborados que los intentos primitivos de desterrar toda curva que resultara esquiva a la intuición. Un libro de texto escrito por un reconocido matemático francés hacia fines del siglo XIX rechaza la precisión introducida por Cauchy: "me abstendré de las controversias eternas sobre la Metafísica del Cálculo Infinitesimal, el carácter inusitado y artificial de muchas demostraciones" (Méray 1872, xii), lo que conducía a objetos que llamaba *bizarros* cuando no directamente *malignos* (Schubring 2012). Las definiciones que se estudian en este capítulo están impregnadas de muchas de las peripecias que el concepto de curva ha padecido con la evolución del análisis matemático.

3. Materiales y Métodos

En este apartado se presenta el modo en que se obtiene la población estratificada de textos (apartados 3.1, 3.2) y las unidades de análisis sobre las que se efectúa el

[19] La construcción misma se logra con un muy sencillo algoritmo en donde se advierte la recursividad del proceso; por ejemplo, con la aplicación matlab® bastaría escribir: function [x,y] = hilbert(n); if n <= 0, x = 0; y = 0; else; [x0, y0] = hilbert(n - 1); x = .5*[-.5+y0 -.5+x0 .5+x0 .5-y0]; y = .5*[-.5+x0 .5+y0 .5+y0 -.5-x0]; end (Rovenski 2010, 217). En el punto 5.1 del anexo se asienta una visualización de una corrida en la aplicación.

análisis de contenido, se presenta la información recogida de las unidades de registro (3.3, 3.4), se definen las categorías intensionales que son relevantes en la definición del concepto *curva* (3.5). Para cumplir el requisito básico de obtener procesos reproducibles, y reconociendo el carácter inferencial de la codificación de unidades textuales resultantes del análisis de contenido, se explicitan en su totalidad las reglas igualmente aplicables a todas las unidades de análisis y se detallan los procesos utilizados para situar los datos dentro de las categorías establecidas (3.6, 3.7): en estos dos apartados se ponen de manifiesto las consideraciones de naturaleza cualitativa que se ponen en juego en la interpretación del contenido manifiesto del cuerpo textual analizado (Krippendorff 1990, 31, Leray 2008, 7).

3.1. Los libros citados en la Argentina: matriz MTC

La población de libros de texto de Cálculo o Geometría (TC) resulta del relevamiento de la bibliografía pertinente al tema de ‘curvas’, publicada en web por las universidades que ofrecen carreras de ingeniería en la Argentina. Se recoge de esta manera una población de 33 textos. El texto de cálculo k-ésimo de esta población se identifica como TC_k, con k tomando todos los valores naturales entre 1 y 33, lo que da como resultado la matriz MTC.

Matriz 1. La matriz MTC (identificación de la población de los libros de texto de cálculo diferencial incluidos en la bibliografía de carreras de ingeniería en la Argentina)

Id. T	Libro de texto
TC01	**Apostol, Tom**. *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Segunda edición. Traducido por Francisco Vélez Cantarell. Vol. II. 2 vols. Barcelona: Reverté, 1980.
TC02	**Bugrov, Y., y S. Nokolski**. *Matemáticas superiores. Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variable compleja.* Primera edición. Traducido por A. Samojválov. Moscú: Mir, 1985.
TC03	**Curtis, Philip.** *Cálculo de varias variables con álgebra lineal.* Primera edición. Primera reimpresión. Traducido por María Cristina Sangines de Salinas y Olimpia Mourut de Montppellier (revisora). México D. F.: Limusa, 1979.
TC04	**Edwards, Charles Henry, y David Penney**. *Cálculo con Geometría Analítica.* Cuarta edición. Traducido por Óscar Palmas Velasco y Víctor Hugo Ibarra Mercado. Naucalpán de Juárez. México: Prentice Hall, 1996.
TC05	**Fedenko, A**. *Problemas de geometría diferencial.* Primera edición. Traducido por A Samojválov. Moscú: Mir, 1981.
TC06	**Flanigan, Francis, y Jerry Kazdan**. *Cálculo dos: funciones lineales y no lineales.* Primera edición en español. [Original: Calculus two: linear and no linear functions]. Traducido por Elena de Feder. México D.F.: Cecsa, 1975.
TC07	**Flax, Rafael**. *Ejercicios teórico-prácticos de Análisis Matemático II vectorial.* Primera edición. Vol. I. 3 vols. Buenos Aires: Infociencia, 2003b.
TC08	**Kreyszig, Erwin.** *Advanced Engineering Mathematics.* Séptima edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1993.
TC09	**Kudriávtsev, L. D.** *Curso de análisis matemático. Tomo I.* Primera edición. Traducido por Vicente Fernández. Vol. I. 2 vols. Moscú: Mir, 1983.

TC10	**Kudriátsev, V. A., y B. P. Demidóvich**. *Breve curso de Matemáticas Superiores.* Primera edición. Traducido por S. A. Bulánov. Moscú: Mir, 1989.
TC11	**Lang, Serge**. *Cálculo II.* Primera edición. Traducido por Hugo Pereyra. México D. F.: Fondo educativo interamericano, 1976.
TC12	**Lang, Serge**. *Cálculo.* Primera edición [Original 1964, A First Course in Calculus]. Traducido por Manuel López Mateos y Iván Castro Chadid. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
TC13	**Lang, Serge**. *Introducción al Análisis Matemático.* Primera edición. Traducido por Manuel López Mateos y Mario. Muñoz Mella. Wilmington, Delaware.: Addison Wesley Iberoamericana., 1990.
TC14	**Larson, Ron, Robert Hostetler, y Bruce Edwards**. *Cálculo II.* Séptima edición [Original 2002 Calculus with Analytic Geometry]. Traducido por Lorenzo Abellanas Rapún. Madrid: Pirámide, 2004.
TC15	**Leithold, Louis**. *El Cálculo.* Séptima edición [Original 1994, The Calculus]. Traducido por Fidencio Mata González y Claudia Patiño Román. México D.f.: Oxford Universoty Press, 2009.
TC16	**Lipschutz, Seymour**. *Teoría y problemas de Geometría diferencial.* Primera edición. Traducido por Víctor Ariza Prada. Naucalpán de Juárez: McGraw-Hill, 1991.
TC17	**Marsden, Jerrold E., y Anthony J. Tromba**. *Cálculo Vectorial.* Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
TC18	**Mena, Baltasar**. *Introducción al cálculo vectorial.* Primera edición. México D.F.: Thomson, 2003.
TC19	**Piskunov, N**. *Cálculo diferencial e integral.* Priemrad edición. Sexta reimpresión [Original 1966 Diferentsialnoye Integralnoye Ischislenie]. Traducido por Carlos Vázquez y Victorio Fernández. Barcelona: Monataner y Simon, 1998.
TC20	**Pita Ruiz**, Claudio. *Cálculo Vectorial.* Primera edición. Naucalpán de Juárez: Prentice Hall Hispanoamericana, 1995.
TC21	**Pogorélov, A. V**. *Geometría diferencial.* Primera edición. Traducido por Carlos Vega. Moscú: Mir, 1977.
TC22	**Postnikov, M.** *Leçons de géométrie. Algèbre linéaire et géométrie différentielle.* Primera edición en francés, primera reimpresión. Traducido por Irina Pétrova. Moscú: Mir, 1988.
TC23	**Purcell, Edwin, Dale Varberg, y Steven Rigdon**. *Cálculo.* Novena edición. Traducido por Víctor Hugo Ibarra Mercado. Naucalpán de Juárez. México: Pearson Educación, 2007.
TC24	**Rabuffetti, Hebe**. *Introducción al análisis matemático. (Cálculo 2).* Cuarta edición. Buenos Aires: El Ateneo, 1991.
TC25	**Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo**. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.* Séptima edición. Vol. II. 3 vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.
TC26	**Salas, Hille, y Etgen**. *Calculus. Una y varias variables. Volumen II.* Primera edición. Priemra reimpresión. Traducido por Santiago Carrillo Menéndez. Barcelona: Reverté, 2005.
TC27	**Santaló, Luis**. *Vectores y tensores con sus aplicaciones.* Decimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.
TC28	**Smith, Robert, y Rolland Minton**. *Cálculo. Tomo II.* Primera edición. Traducido por Hernando Castillo y Germán Villlamizar. Vol. II. 2 vols. Bogotá: McGraw-Hill, 2001.
TC29	**Spiegel, Murray**. *Cálculo Superior.* Primera edición. Cali: McGraw-Hill, 1973.
TC30	**Spinadel, Vera W. de**. *Cálculo 2.* Primera edición. Buenos Aires: Nueva Librería, 1981.
TC31	**Stewart, James**. *Cálculo multivariable.* Cuarta edición. Traducido por José Romo. Bogotá: Thomson Learning, 2008.
TC32	**Strang, Gilbert**. *Calculus.* Sexta edición. Massachussets: Wellesely-Cambridge Press, 2009.
TC33	**Thomas, George**. *Cálculo. Varias Variables.* Undécima edición. Traducido por Rodolfo Iglesias. México D. F.: Pearson Educación, 2006.

Fuente: elaboración propia

Los identificados con TC07, TC24, TC25, TC27 son textos editados en la Argentina por profesores que se han desempeñado en universidades locales: en la Facultad de Ciencias exactas de la Universidad de Buenos Aires los autores de TC25 y TC27, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires el autor de TC07, en la Universidad Tecnológica Nacional la autora de TC24. El resto de los textos –un total de 29– fueron editados originalmente en el exterior y se han incorporado al uso corriente en el medio académico local a través de sus traducciones al castellano, con las excepciones de los textos TC22 y TC32, del que no existe una versión en la lengua española.

3.2. Los libros no citados en la Argentina: matriz MT*C

Junto a la población completa de 33 textos anteriores (TC), se considera en este apartado la población disponible (T*C) de 36 textos procedentes de las bibliografías de las universidades del extranjero que encabezan los rankings CSIC y QS[20], cuyos criterios de ordenamiento bibliométricos fueron expuestos en el capítulo anterior. Se debe observar que en esas universidades *también* se incluyen, y con particular intensidad, muchos de los textos incluidos en las bibliografías de la Argentina del apartado anterior; podría decirse que los títulos que han alcanzado algún prestigio en las universidades del exterior son los que las editoriales consideran incorporar al mercado local. Se toma de la población T*C una muestra aleatoria de gran tamaño (26 textos, ~3/4 de la población), introduciendo una distribución de densidad de probabilidad uniforme, para así obtener la matriz de textos MT*C, lo que puede escribirse como MT*C = F_1 (T*C) siendo F_1 el filtro aleatorio que recoge 26 textos. La instrumentación del filtro mismo se efectúa mediante la generación pseudoaleatoria de 26 números naturales comprendidos entre 1 y 36. Los así sorteados (el proceso de generación con una aplicación se explica en el punto 5. 2 del Anexo) se numeran correlativamente, iniciando en 1, y se listan identificándose sus datos en la Matriz 2.

Matriz 2. La matriz MT*C (identificación de la muestra de libros de texto de cálculo diferencial no incluidos en la bibliografía de carreras de ingeniería en la Argentina)

Id. T*	Libro de texto
T*C01	**Alekseevskij, D, A Vinogradov, y V Lychagin.** *Geometry I: basic ideas and concepts of differential geometry. With 62 Figures.* Primera edición. New York: Springer, 2010.
T*C02	**Blaga, Paul**. Blaga, Paul. *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Primera edición. xxx: xxx, 2005.
T*C03	**Bugrov, Ya. S., y S. M. Nikolski**. *Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral*. Primera edición. Moscú: Mir, 1984.

[20] Cibermetría del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC www.webometrics.info/es/Ranking_Europe) de España, y el ranking mundial por especialidades (QS World University 2013, www.topuniversities.com). En Europa son University of Cambridge; University of Oxford; Swiss Federal Institute of Technology; University College London; Utrecht University; Università di Bologna; University of Edinburgh; Universidade do Porto; Universität Wien; Norwegian University y en el mundo Massachusetts Institute of Technology (MIT); Harvard University; Stanford University; Princeton University; University of California, Berkeley (UCB); University of Cambridge; University of Oxford; New York University (NYU); Yale University; University of California, Los Angeles (UCLA).

T*C04	**Borisenko, A., y I. Tarapov**. *Vector and Tensor Analysis with Applications.* Primera edición. Traducido por Richard Silverman. New York: Dover Publications, 1979.
T*C05	**Courant, Richard, y Fritz John**. *Introduction at Calculus and Analysis. Volume two.* Primera edición. Vol. II. 2 vols. New York: Wiley & Sons, 1974.
T*C06	**Creighton Buck, Robert, y Ellen Buck**. *Advanced Calculus.* Cuarta edición. New York: McGraw-Hill, 1978.
T*C07	**Edwards, Charles Henry.** *Adavanced calculus of several variables.* Primera edición. London: Academic Press, 1973.
T*C08	**Ghorpade, Sudhir, y Balmohan Limaye.** *A Course of Calculus and Analysis Real. With 71 figures.* Primera edición. New York: Springer, 2006.
T*C09	**Gibson, Charles**. *Elementary geometry of differentiable curves. An undergraduate introduction.* Primera edición. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
T*C10	**Gill**. *Calculus and analytic geometry.* Segunda edición. New York: Addison-Wesley, 2012.
T*C11	**Hairer, Ernst, y G. Wanner**. *Analysis by its History.* Primera edición. New York: Spinger-Verlag, 1996.
T*C12	**Hirst, Keith**. *Calculus of One Variable. With 72 Figures.* Primera edición. Londres: Springer, 2006.
T*C13	**Hocking, John**. *Calculus with an introduction to linear algebra.* Primera edición. Chicago: Holt, Rinehart and Winston, 1970.
T*C14	**Kaplan, Wilfred, y Donald Lewis**. *Calculus and linear algebra. Volume II. Vector spaces, Many variable-Calculus, and differential equations.* Primera edición. Vigésima reimpresión [Original 1970]. Vol. II. 3 vols. Michigan: Scholarly Publishing Office, 2007.
T*C15	**kühnel, Wolfgang**. *Differentialgeometrie. Kurven–Flächen–Mannigfaltigkeiten.* Quinta edición. Wiesbaden: Vieweg, 2013
T*C16	**Lehman, Daniel, y Rudolphe Bkouche**. *Initiation à la géométrie.* Primera edición. París: Presses Universitaires de France, 1988.
T*C17	**Montiel, Sebastián, y Antonio Ros**. *Curves and Surfaces.* Primera edición.Traducido por Sebastián Montiel. Rhode Island: American Mathematical Society, 2005.
T*C18	**O´Neill, Barret**. *Elementary Differential Geometry. Revised Second Edition.* Segunda edición revisada. Oxford: Elsevier Academic Press, 2006.
T*C19	**Pressley, Andrew**. *Elementary differential geometry.* Primera edición. New York: Springer, 2000.
T*C20	**Smith, G**. *Vector Analysis. Including Dynamics of a Rigid Body.* Primera edición. Oxford: Oxford University Press, 1962.
T*C21	**Spivak, Michael.** *A comprehensive introduction to differential geometry. Volume two.* Segunda edición. Vol. 2. V vols. Houston, Texas: Publish or Perish, 1979.
T*C22	**Struik, Dirk**. *Lectures on Classical Differential Geometry.* Segunda edición. Cuarta reimpresión [Original 1950]. New York: Dover, 1988.
T*C23	**Toponogov, Victor Andreevich.** *Differential Geometry of Curves and Surfaces. A concise guide.* Primera edición. Boston: Birkhäuser, 2006.
T*C24	**Vera, Gabriel**. *Lecciones de Análisis Matemático II*. Murcia: Universidad de Murcia, 2008.
T*C25	**Voedts, Jean.** *Cours de Mathématiques.* Segunda edición. Paris: Ellipses, 2012.
T*C26	**Zorich, Vladímir**. *Analysis I*. Segunda edición. Heildelberg: Springer, 2004.

Fuente: elaboración propia

Los textos de la matriz anterior tienen presencia en las bibliografías de carreras de ingeniería de las principales universidades según los estándares bibliométricos objetivos, e incluye libros ya clásicos, como el texto T*C03, una publicación del Courant Institute of Mathematical Sciences New York University, actualizada del original (1937) del profesor Courant que “ha tenido un rotundo éxito al introducir a muchas generaciones de matemáticos a las matemáticas superiores” (Courant y John 1974, v), o el igualmente renombrado texto (T*C13) actualizado del original (1970) de los profesores de la Universidad de Michigan, Wilfred Kaplan y Donald Lewis, o el texto T*C15, citado en las universidades alemanas del ranking, cuyo autor es profesor de la Universität Sttutgart, Wolfgang Khünel.

3.3. Las definiciones de *curva* en la población TC: matriz MD

Para cada uno de los textos de la matriz MTC se recogen, en la siguiente matriz de definiciones MD, los fragmentos en que se presenta la definición de *curva*. Para los textos traducidos al castellano, se reproduce la versión del traductor (sus datos se hallan en la matriz MTC), mientras que para los textos que no cuentan con una versión traducida, los fragmentos reproducidos están tomados de su versión original y es sobre ella que se efectúa el análisis de sus componentes intensionales que incluyen los conjuntos de partida y de llegada de la función vectorial con la que se define la curva (o que es la misma curva, según las definiciones texto del que se trate). La traducción en la versión del autor de esta tesis se consigna entre corchetes en la misma celda, con una tipografía más pequeña.

Matriz 3. La matriz de definiciones MD carga en cada fila la definición de *curva* a través de cada uno de los textos que integra la totalidad de la población TC (citados en la Argentina)

Tex. Pág.	Las definiciones de *curva* extraídas de cada libro de texto TC
TC01 393	Sea α una función vectorial definida en un intercalo cerrado finito J = [a, b]. Cuando t va tomando los valores de J, la función $\alpha(t)$ describe un conjunto de puntos en el n-espacio llamado *gráfica* de la función. Si α es continua en J la gráfica se llama *curva*; con mayor precisión, es la curva descrita por α. […] α se llama *camino*.
TC02 192	La curva $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \kappa(t)\,\mathbf{k}$ $(a \leq t \leq b)$ se llama *suave a trozos continua*, si las funciones (φ, ψ, κ) son continuas sobre [a, b] y el segmento [a, b] se puede partir en un número finito de segmentos parciales $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, de modo que sobre cada uno de ellos las funciones (φ, ψ, κ) tengan las derivadas continuas que no sean simultáneamente iguales a cero […] Designaremos la curva con una letra, por ejemplo, la letra Γ. Generalmente Γ significa no sólo el lugar geométrico de los puntos (x, y, z) definidos por las ecuaciones, sino también el orden de seguimiento de estos puntos cuando t crece continuamente de a a b.
TC03 389	Una curva α en $V_3(\mathbb{R})$ es una función continua que mapea un intervalo cerrado [a, b] de números reales en $V_3(R)$ […] El rango o imagen de la función α, o sea el conjunto de puntos X en $V_3(R)$ tales que $X = \alpha(t)$ para $t \in [a, b]$, se llama la imagen de la curva α.
TC04 712	Piense en un punto que se mueve a lo largo de una curva en el espacio. Podemos describir su posición en el instante t mediante las *ecuaciones paramétricas* $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ que dan sus coordenadas en el instante t. De otro modo, podemos determinar la posición del punto mediante su vector posición $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$
TC05 18	Sea I un intervalo, un segmento, o un intervalo semiabierto sobre la recta $\mathbb{R}$. Llámese *camino* (o *curva parametrizada*) de la clase C^k en el espacio $\mathbb{R}^3$ a la función vectorial $\mathbf{r}$: $I \to \mathbb{R}^3$ de la clase C^k que designaremos con (I, $\mathbf{r}$). Dos caminos (I, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$) y (J, $\rho = \rho(t)$) de a clase C^k, donde I y J son intervalos, se denominan *equivalentes* si existe un difeomorfismo λ: $I \to J$ de la clase C^k tal que $\mathbf{r}(t) = \rho(\lambda(t))$. Las clases de caminos equivalentes (de curvas parametrizadas) se llaman *curvas* y cada camino de esta clase, *parametrización de la curva*. Todos los caminos equivalentes que forman la curva dada tienen la misma imagen que se denomina *imagen de esta curva*. La imagen de una curva se dice frecuentemente curva…
TC06 268	Sea F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$ […] Debemos pensar que t varía a lo largo de un eje t de una dimensión. A medida que t se mueve a lo largo del eje, el punto F(t) se mueve en el espacio $\mathbb{R}^q$ y ahí traza una curva.

TC07 195	Recordemos la definición de curva suave (o lisa). Si $\overline{f}: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ / $[a, b] \subset D \wedge f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$ tiene derivada $\overline{f}'$ continua y distinta de $\overline{0}$ $\forall\, t \in (a, b)$ entonces la curva imagen de $\overline{f}$ se llama curva lisa.
TC08 457	A Cartesian coordinate system being given, we may represent a curve C by a vector function **r**(t) = [$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$], to each value t_0 of the real variable t there corresponds a point of C. A representation of the form is called a **parametric representation** of the curve C, ant t is called the *parameter* of this representation […] A curve C may be given by various vector functions. [Dado un sistema cartesiano de coordenadas, podemos representar una curva C por una función vectorial **r**(t) = [x(t), y(t), z(t)], que a cada valor t_o de la variable real t le asigne un punto en C. Una representación de esa forma es llamada una **representación paramétrica** de la curva C, y t es llamado el *parámetro* de esta representación…Una curva C admite varias funciones que la representan].
TC09 277	Sea **r**: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. El conjunto Γ del espacio dado como la imagen continua de cierto segmento se llama *curva continua* o simplemente curva. La aplicación continua indicada del segmento [a,b] sobre el conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ se llama representación de la curva Γ y se escribe $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b\}$. De esta forma una curva no es simplemente un conjunto del espacio, sino un conjunto analizado como resultado de cierta aplicación continua de un segmento. Dicho de otro modo, una curva es un conjunto del espacio más una aplicación continua del segmento sobre él.
TC10 337	El punto corriente M(x, y, z) de la curva L puede ser caracterizado por su radio vector (**"radio vector de seguimiento"**) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ son vectores unitarios). En este caso mediante las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación vectorial de la línea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t)$, donde $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{i}\varphi(t) + \boldsymbol{j}\psi(t) + \boldsymbol{k}\kappa(t)$ es la llamada *función vectorial del argumento t*, El conjunto de todos los puntos M(x, y, z) del espacio, cuyas coordenadas satisfacen una ecuación dada (o un sistema de ecuaciones) se llama *imagen geométrica* (*gráfico*) de esta ecuación.
TC11 38	Sea I un intervalo. Una **curva parametrizada** (definida sobre este intervalo) es una asociación que a cada punto de I le hace corresponder un vector. Si X denota una curva definida sobre I, y si t es un punto de I, entonces $X(t)$ denota el vector asociado a t por X. A menudo escribimos la asociación $t \rightarrow X(t)$ como flecha: X: I $\rightarrow \mathbb{R}^n$.
TC12 499	Sea I un intervalo. Una **curva parametrizada** (definida en este intervalo) es una asociación que a cada punto de I asocia un vector. Si X denota una curva definida en I y t es un punto de I, entonces X(t) denota el vector asociado a t mediante X. A menudo escribimos La asociación t$\rightarrow$X(t) mediante una flecha X: I$\rightarrow \mathbb{R}^n$. **Observación.** Los intervalos de definición de nuestras curvas serán abiertos, cerrados, semiabiertos o semicerrados.
TC13 199 200	Sea f una función de un intervalo J a un espacio vectorial normado E. Suponemos que el intervalo tiene más de un punto y puede contener a sus extremos. Una función de un intervalo en un espacio vectorial normado, se considera, y se llama, una curva en el espacio.
TC14 138	Una curva C en el espacio (o curva espacial) es un conjunto de tríos ordenados ($f(t)$, $g(t)$, $h(t)$) junto con sus ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. […] Técnicamente, una curva en el plano o en el espacio consta de dos ingredientes: una colección de puntos (la gráfica) y unas ecuaciones paramétricas que la definen. Dos curvas diferentes pueden tener la misma gráfica.
TC15 740 865	Suponga que una partícula se mueve en el plano de modo que las coordenadas (x, y) de su posición en cualquier tiempo t, están dadas por las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$. Entonces, para cada número t del dominio común de f y g la partícula se encuentra en el punto ($f(t)$, $g(t)$) y estos puntos describen una **curva plana** recorrida por la partícula. Las ecuaciones se denominan **ecuaciones paramétricas de c** y la variable t se llama **parámetro**. La curva **c** recibe también el nombre de **gráfica**; esto es, el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen las ecuaciones es la gráfica de las ecuaciones paramétricas.
TC16 45 47	Concepto de curva. Se denomina *representación paramétrica regular* a una función vectorial (3.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in$ I de t en un intervalo I, la cual goza de las siguientes propiedades: (i) $\mathbf{x}(t)$ es de clase C^1 en I, (ii) $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t de I […]*definimos una curva regular diciendo que es una clase de equivalencia de las representaciones paramétricas regulares*.
TC17 190	Una **trayectoria** en $\mathbb{R}^n$ es una función $\boldsymbol{\sigma}$: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{\sigma}$ es de clase C^1, decimos que $\boldsymbol{\sigma}$ es una C^1 **trayectoria**. Los puntos $\boldsymbol{\sigma}(a)$ y $\boldsymbol{\sigma}(b)$ se llaman **extremos** de la trayectoria. La imagen de $\boldsymbol{\sigma}$ se llama **curva** de $\boldsymbol{\sigma}$. […] Es útil denotar la variable como t y pensar que $\boldsymbol{\sigma}(t)$ va trazando una curva en $\mathbb{R}^n$ conforme t va variando.
TC18 112	Llamamos curva al conjunto de valores de una función que mapea un intervalo en **R** al plano $\mathbb{R}^2$ o al espacio $\mathbb{R}^3$. A ese mapeo se le llama trayectoria **C**. Se usa t como variable independiente, luego **c**(t) es la posición de una partícula en el instante t.

TC19 100 101	Consideremos las dos ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ donde t toma los valores del intervalo $[T_1, T_2]$. A cada valor de t corresponden dos valores, uno de x y otro de y (suponemos que φ y ψ son funciones unívocas). Considerando que los valores de x e y son las coordenadas de un punto del plano Oxy, a cada valor de t corresponderá un punto determinado de dicho plano. Este punto describe cierta curva en el plano, cuando t varía de T_1 a T_2.
TC20 432 433	Una función **f**: $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ se llama **camino *o* trayectoria** en el espacio $\mathbb{R}^n$. Se llama *traza* al conjunto imagen de la función **f.** […] Designamos con la palabra *curva* en $\mathbb{R}^n$ a la traza de un camino.
TC21 14	Un conjunto γ de puntos del espacio se llamará *curva elemental* si es la imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto de la recta. Sea γ una curva elemental y sea $a < t < b$ el segmento del que se obtiene por la aplicación f la curva. Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, las coordenadas del punto de la curva correspondiente al punto t del segmento. El sistema de igualdades $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ se denomina *ecuaciones* de la curva γ en forma paramétrica.
TC22 197 198	On appelle *courbe continue* dans l'espace euclidien (ou affine) E de dimension n l'application continue d'un segment [a, b], a < b, de l'axe des t dans l'espace E. On souligne qu'une courbe continue est par définition non un ensemble de points, mais une application ; n'empêche que le vocabulaire utilisé le contredit constamment […] On appelle des fois *support* de la courbe l'ensemble de tous ses points, i.e. l'image de [a, b]… [Se llama *curva continua* en el espacio euclídeo (o afín) E de dimensión n a la función continua de un segmento [a, b], a<b, del eje t en el espacio E. Se resalta que una curva continua no es, por definición,, un conjunto de puntos, sino una función; no importa que el vocabulario utilizado lo contradiga constantemente… Se llama a veces *soporte* de la curva al conjunto de todos sus puntos, esto es, a la imagen de [a, b] a través de la función].
TC23 530	Una curva plana queda determinada por una pareja de ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in I$, con f y g continuas en el intervalo I. Por lo general, I es un intervalo cerrado $[a, b]$. Cuando t avanza de a a b el punto (x, y) describe la curva en el plano xy.
TC24 297 298	Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}^n$. Si f es una función vectorial continua, su recorrido es una curva en el espacio de puntos (o vectores) $\mathbb{R}^n$, que se considera descripta por la función y une los puntos f(a) y f(b). Estas curvas suelen llamarse "curvas puntuales" […] si bien para cuestiones geométricas puede alcanzar el estudio de la curva puntual…, en general se necesita la trayectoria, o sea, es necesario considerar la función vectorial asociada.
TC25 245	*Curva* C en el espacio E_3 es el conjunto de puntos (x, y, z) descrito por tres funciones continuas [72-35] $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$ al variar u en un intervalo finito o infinito. Las [72-35] se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva, de la que mediante $\mathbf{r}(u) = x(u)\,\mathbf{i} + y(u)\,\mathbf{j} + z(u)\,\mathbf{k}$ se obtiene directamente su *representación vectorial* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.
TC26 785	Supongamos que $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$ es diferenciable en cierto intervalo I (en los puntos extremos, si los hay, sólo exigimos continuidad). Para cada t perteneciente I, el extremo del radio vector $\boldsymbol{r}(t)$ es el punto P $(x(t), y(t), z(t))$. Cuando t recorre I, el punto P describe una cierta trayectoria **C**. Diremos que **C** es una curva *diferenciable* y que está *parametrizada* por t.
TC27 135	Supongamos un punto X cuyas coordenadas x, y, z sean funciones de un parámetro t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Cuando t varía en cierto intervalo, el punto X describe una *curva*.
TC28 958	Una función con valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$ es una aplicación de su dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ en su recorrido $\mathbb{R} \subset V_3$, de modo que para cada t en D, $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{a}$, para un único vector $\boldsymbol{a} \in V_3$ (la curva es la imagen de **r**).
TC29 139	Si **r** es el vector que va del origen O de un sistema de coordenadas al punto (x, y, z) al dar las componentes de la función vectorial $\mathbf{r}(u)$ quedan definidas x, y, z como funciones de u. Al variar u, el extremo de **r** define una *curva en el espacio* de ecuaciones paramétricas $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$.
TC30 52 53	Dada la función vectorial (2.4) $\overline{\mathbf{r}}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ donde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son funciones continuas y no todas constantes para $t \in J \subset \mathbb{R}$, cuando t recorre los valores de J, el vector $\overline{\mathbf{r}}(t)$ traza una curva C que es llamada "gráfica" o "grafo" de (2.4).
TC31 838	Hay una estrecha relación entre las funciones vectoriales continuas y curvas en el espacio. Suponga que f, g, y h, son funciones continuas de valor real en un intervalo I. Entonces el conjunto C de los puntos del espacio (x, y, z) donde $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, con t variando en el intervalo I, se denomina **curva en el espacio**. Las ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas de C** y t es el **parámetro**.
TC32 446	The vector $\mathbf{R}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ is moving. It is a function of the parameter t, which often represents time. At each time t, the position vector $\mathbf{R}(t)$ locates the moving body: $\mathbf{R}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. As t varies, these points trace out a ***curve in space.*** The parameter t tells when the body passes each point on the curve. [El vector $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ es móvil. Es una función del parámetro t, que a menudo representa el instante. En cada instante t, el vector posición $\mathbf{R}(t)$ localiza el cuerpo que se mueve: $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Cuando t varía, estos puntos dibujan una curva en el espacio. El parámetro t indica cuándo el cuerpo pasa por cada punto de la curva].

TC33 906	Cuando una partícula se mueve a través del espacio durante un intervalo de tiempo I, pensamos en las coordenadas de la partícula como funciones definidas en I: (1) $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in$I. Los puntos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in$I, forman la **curva** en el espacio que llamaremos **trayectoria** de la partícula. Las ecuaciones e intervalo de la ecuación (1) representan una **parametrización** de la curva.

Fuente: elaboración propia

Los párrafos recogidos en las definiciones de la matriz anterior han sido seleccionados de modo que contengan los elementos suficientes para la construcción de las componentes de intensión que se pretenden analizar. Cuando el párrafo es una composición fragmentada del texto, se indica con el símbolo […] el lugar de la interrupción. Se ha mantenido la tipografía original (al menos en lo que respecta a la diferenciación de subrayados, énfasis o cursivas).

3.4. Las definiciones de *curva* en la muestra T*C: matriz MD*

Para cada uno de los 26 textos de la matriz M*TC se recogen, en la siguiente matriz de definiciones M*D, los fragmentos en que se presenta la definición de *curva*; los fragmentos reproducidos están tomados en su versión original, y sobre ellos se efectúa el análisis de contenido intensional. Las traducciones en la versión del autor de esta tesis se ofrecen localmente en las instancias del análisis mismo.

Matriz 4. La matriz de definiciones MD* reproduce en cada fila la definición de *curva* a través de cada uno de los textos de la muestra T*C (no citados en la Argentina)

Tex. Pág.	Las definiciones de *curva* extraídas de cada libro de texto T*C
T*C01 25	A parametrized curve in Euclidean space E^n of n dimensions is a smooth (infinitely differentiable) regular map x: $I \to E^n$ where I is an interval of the number line $\mathbb{R}$. In coordinates such a curve is given by a vector-valued function $x(t) = (x_1(t),..., x_n(t))$ where $t \in I$, and $(x_l..., x_n)$ are Cartesian coordinates in E^n.
T*C02 14 15	Let I be an interval on the real axis $\mathbb{R}$. We shall not assume always that the interval is open. Sometimes it is even important that the interval be closed. In particular, the interval can be unbounded and can coincide with the entire real axis. A C^k ($k > 0$) parameterized curve (or path) in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$ is a C^k mapping **r**: $I \to \mathbb{R}^3$: $t \to (x(t), y(t), z(t))$. A parameterized curve is, typically, denoted by (I, **r**), (I, r = **r**(t)) or, when the interval is implicit, just **r** = r(t). The path is called compact, half-open or open, if the interval I is, respectively, compact, half-open or open.
T*C03 171	Las ecuaciones (1) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a < t < b$ donde φ y ψ son unas funciones continuas en (a, b), definen *cierta curva continua definida con ayuda del parámetro t*, es decir, un lugar geométrico de puntos $(\varphi(t), \psi(t))$ ordenados mediante el parámetro $t \in (a, b)$. Cuando t crece, el punto $(\varphi(t), \psi(t))$ se desplaza por un plano.
T*C04 35	A vector, just like a scalar, can vary with respect to both spatial position **r** and time t, giving rise to a vector function **A** = **A**(**r**, t). Here we confine ourselves to the case of a vector function of a scalar argument, i.e., a rule assigning a unique value of a vector **A** to each admissible value of a scalar t (usually, but not necessarily, the time). If **A** is a function of t, then so are all its components, as well as its magnitude and direction. Suppose the vector **A** = **A**(t) is drawn from a fixed point O. Then as t varies, the end point of A traces out a curve called the *hodograph* of **A**.

T*C05 86	A simple arc Γ is a set of points P = (*x*, *y*, *z*) that can be represented parametrically in the form x = φ(t), y = ψ (t), z = κ (t); *a* < *t* < *b*, where φ, ψ, κ are continuous functions of *t* for *a* < *t* < *b*, and different t in that interval correspond to different points P. The parametric representation constitutes a 1-1 continuous mapping of the interval on the t-axis onto the set Γ in space […] The same simple arc Γ has many different parametric representations.
T*C06 399 400	A curve γ in n space is a mapping or transformation from $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^n$. In more familiar terminology, we have identified the notion of curve with what is often called a parametric representation. A point p in $\mathbb{R}^n$ is said to lie on the curve when there is a *t* for which p = γ(t). The set of all points which lie on y is called the trace of γ. It is important to keep in mind the fact that the curve is the transformation and not the set of points lying on γ. Many different curves can have the same trace.
T*C07 287	By a C^1 *path* in $\mathbb{R}^n$ is meant a continuously differentiable function γ: [*a*, *b*] $\to \mathbb{R}^n$. El C^1 path γ: [*a*, *b*] $\to$ $\mathbb{R}^n$ is said to be *smooth* if $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ *for all t*$\in$[*a*, *b*].
T*C08 311 312	Let t_0 be an interior point of an interval [*α, β*] and consider a curve *C* given by (*x*(*t*), *y*(*t*)), *t* $\in$ [*α, β*], where the functions *x* and *y* are differentiable at t_0 […]The curve *C* should not be confused with its image {(*x*(*t*), *y*(*t*)) $\in \mathbb{R}^2$: *t* $\in$ [*α, β*]}.
T*C09 13	A *parametrized curve* (or jus *curve* if there is no ambiguity) is a smooth mapping z: I$\to$R^2, with I$\subseteq$R an open interval. Thus I is a set of real numbers *t* (the parameters) which satisfy an inequality of the form a < *t* < b, where we allow either or both of the possibilities a = $-\infty$, b = ∞.
T*C10 366	A parametrized curve C in the xy-plane has the form C = {(*x*, *y*): *x* = *f*(*t*), y = *g*(*t*), *t* $\in$ I} for some interval I, finite or infinite. The functions *f* and *g* are called the coordinate functions and the variable *t* is called the parameter.
T*C11 287	Let A be a subset of $\mathbb{R}^n$. A function *f*: A$\to\mathbb{R}^m$ maps the vector x = (x_1, … , x_n)$\in$A to the vector y = (y_1, …, y_m)$\in\mathbb{R}^m$ […] Two functions (m = 2) of one variable represent a curve in $\mathbb{R}^3$. For example, the spiral of Fig.2.1.b is given by y_1 = cos 10x, y_2 = sin 10x. If we project the curve onto the (y_1-y_2) plane, we obtain a “parametric representation” of a curve in $\mathbb{R}^2$ (in our example a circle).
T*C12 218	Not all curves can be given as the graph of a function, for example a circle, and so we shall deal with the more general situation where a curve is described parametrically by means of the equations *x* = *x*(*t*), *y* = *y*(*t*), *a*≤ *t* ≤ *b*. We shall assume that we have a smooth curve, for which the functions *x*(*t*) and *y*(*t*) have continuous derivatives for *a* ≤ *t* ≤ *b*.
T*C13 667	An ordered triple of real-valued functions (*x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*)) defined on an interval {*t*: a ≤ *t* ≤ b} provides a transformation of his interval onto the curve in space C = {(*x*, *y*, *z*): *x* = *x*(*t*), *y* = *y*(*t*), *z* = *z*(*t*); a ≤ *t* ≤ b}. The triple of functions is called a *parametrization* of C and the equations *x* = *x*(*t*), *y* = *y*(*t*), *z* = *z*(*t*) are the *parametric equations* of the curve. We shall see that there infinitely many different but related parametrizations of a given curve.
T*C14 1050	Let C be a path in the x-y plane given by equations x = f(t), y = g(t), a ≤ t ≤ b where f, g have continuous first derivatives. Thus C is a smooth path.
T*C15 6	Eine regulare parametrisierte Kurve ist eine stetig differenzierbare Immersion c: I $\to \mathbb{R}^n$, definiert auf einem Intervall I $\subseteq \mathbb{R}$. [Una curva parametrizada regular es una inmersión continuamente diferenciable c: I $\to \mathbb{R}^n$ definida en un intervalo real I $\subseteq \mathbb{R}$.
T*C16 399	Etant donné un espace métrique X, dont *d* on note *d* la distance, rappelons qu'on appelle *courbe paramétrée*, d'origine A et d'extrémité B dans X, toute application continue γ : [a, b] $\to$ X d'un intervalle compact [a, b] dans X, telle que γ(a) = A et γ(b) = B. […] Support (resp. support orienté) d'une courbe paramétrée γ: [a, b]$\to$ X la classe d'équivalence de γ pour la relation d'équivalence $\gamma \sim \gamma o \varphi$ où φ: [c, d]$\to$ [a, b] désigne un changement de paramétrage (resp. préservant l'orientation).
T*C17 3	A (differentiable) curve is a C^∞ class map α: I $\to \mathbb{R}^3$ defined on an open, possibly unbounded, interval I of $\mathbb{R}$. Referring to a vector valued function a, the word differentiable means that, if α(t) = (x(t),y(t),z(t)), the three coordinate functions x,y,z are differentiable.
T*C18 16	Let *I* be an open interval in the real line *R*. We shall interpret this liberally to include not only the usual finite open interval *a* < *t* < *b* (*a*, *b* real numbers), but also the infinite types *a* < *t* (a half-line to +∞), *t* < *b* (a half-line to -∞), and also the whole real line […]. Definition. A *curve* in $\mathbf{R}^3$ is a differentiable function α: *I* $\to \mathbf{R}^3$ from an open interval *I* into $\mathbf{R}^3$
T*C19 9	A parametrized curve in $\mathbb{R}^n$ is a map $\boldsymbol{\gamma}$: (α, β) $\to \mathbb{R}^n$ for some α, β, with $\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.
T*C20 62	Let the vector OP, where O is a fixed point, represent a vector quantity A that has only one value for each value of *t*, and whose magnitude and direction varies continuously as *t* varies continuously. Then the point P will trace out a continuous curve in space as *t* varies continuously.

T*C21 1	We begin by considering only curves in the plane, and we further restrict our attention to curves c: [a,bJ $\to$ $\mathbb{R}^2$ which are immersions, i.e. which satisfy c'(t) = dc/dt $\neq$ 0 for all t $\in$: [a,b].
T*C22 1	We can think of curves in space as paths of a point in motion. The rectangular coordinates (x, y, z) of the point can then be expressed as functions of a parameter u inside a certain closed interval: $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$; $u_1 \leq u \leq u_2$. It is often convenient to think of u as the time, but this is not necessary, since we can pass from one parameter to another by a substitution $u = f(v)$ without changing the curve itself.
T*C23 2	A connected set γ in the space $\mathbb{R}^3$ (in the plane $\mathbb{R}^2$) is a *regular k-fold continuously differentiable curve* if there is a homeomorphism $\varphi : G \to \gamma$ where G is a line segment [*a, b*] or a circle of radius 1, satisfying the following conditions (1) $\varphi \in C^k$ $(k \geq 1)$, (2) the rank of φ is maximal (equal to 1). For $k = 1$ a curve γ is said to be *smooth*.
T*C24 75 76	Comenzamos con la terminología asociada a una aplicación γ: [a, b] → E, con valores en un espacio normado (E, || ||). Si γ: [a, b] → E es continua y γ([a, b]) ⊂ Ω se dice que γ es un *camino* o *trayectoria* en Ω⊂ E. Dos caminos γi : [ai, bi] →E se dice que son topológicamente equivalentes cuando existe una biyección continua h : [a1, b1] → [a2, b2] tal que γ1 = γ2 ◦ h. En el conjunto de los caminos en el espacio normado E queda definida así una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia se dice que es una *curva* o un *arco de curva*.
T*C25 944	On appelle arc paramétré de classe C^k dans l'espace affine $\mathcal{E}_n$ toute application de classe C^k définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{E}_n$ Si M : I 3 t $\to$M (t) est un tel arc, il ne faut pas confondre cet arc avec son image, qu'on appelle aussi son support M(I) = {M(t), t $\in$ I}.
T*C26 395	Ein Weg in $\mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung t $\to$ (x(t),y(t),z(t)) eines Intervalls der reellen Geraden auf $\mathbb{R}^3$ die durch die Funktionen x(t), y(t) und z(t), die auf dem Intervall stetig sind, definiert ist. [Un camino en $\mathbb{R}^3$ es una función t $\to$ (x(t),y(t),z(t)) de un intervalo de la recta real en $\mathbb{R}^3$ definido por las funciones continuas x(t),y(t) y z(t)) en el intervalo]

Fuente: elaboración propia

3.5. La función *intensión* I = (I_1, I_2, I_3, I_4)

Del examen cualitativo previo del material recogido en las matrices anteriores, resultan las componentes principales de la *intensión* (Cf. u. s. 2. 2. Abstracción, intensión y extensión) de las definiciones que es necesario examinar para su discriminación. Estas componentes se listan en la siguiente tabla, junto a las preguntas que se dirigen a cada una de las definiciones y que constituyen la grilla de lectura con la que se examinan los textos.

Matriz 5. La matriz operacional de la función *Intensión* que actúa como grilla de lectura de las matrices de definiciones MD y MD* para producir los resultados a analizar

Componentes de intensión	Las preguntas que permiten obtener los valores de las componente de I
I_1. Intervalo de definición	¿Se explicita? ¿Se indica su naturaleza (abierto, cerrado, finito, infinito)?
I_2. La función vectorial	¿Se indica su regularidad? ¿Tiene nombre propio?
I_3. El espacio de llegada	¿Se explicita su estructura métrica? ¿Su dimensión?
I_4. La imagen de la función	¿Qué nombre se le asigna?

Fuente: elaboración propia

La función I, que recibe como variables las definiciones de cada uno de los textos y que se encuentran en la segunda columna de cada una de as matrices MD y MD*, devuelve, para cada texto, los valores –cualitativos– del vector de cuatro componentes (I_1, I_2, I_3, I_4). De esta manera, para cada definición de un texto de TC, por ejemplo para el texto TC_k, se obtiene la k-ésima de resultados, con el índice k tomando todos los valores naturales entre 1 y 33. Del mismo modo, la función I aplicada a cada definición de un texto de T*C, por ejemplo el j-ésimo devuelve el correspondiente vector fila, con el índice j tomando todos los valores entre 1 y 26. Esta sucesiva aplicación de I sobre MD y MD* produce entonces sendas matrices de intensiones MI y MI*, mediante el procedimiento que, en la notación funcional, puede escribirse brevemente por las dos expresiones siguientes:

(1) MI $\stackrel{\text{def}}{=}$ I (MD), con MI de 33 filas por 4 columnas

(2) MI* $\stackrel{\text{def}}{=}$ I (MD*), con MI* de 26 filas por 4 columnas

3.6. Característica y construcción de la matriz de intensión MI (33×4)

La matriz de datos correspondiente a los textos de cálculo citados en la Argentina se completa asignando un valor a cada una de las celdas definidas por el producto cartesiano TC × I. Lo que Johan Galtung llama ‘característica de la matriz es, en este caso, la terna (m, n, r) = (33, 4, 3), donde 33 indica el número de unidades de análisis, 4 las dimensiones del análisis, y se toma como valor aproximado del parámetro r = 3, el número promedio de valores (cualitativos) que puede tomar cada componente I_k de la intensión I (Galtung 1978, 4). En la fila TC_k columna I_j, con ‘k’ tomando los valores naturales entre 1 y 33, ‘j’ tomando los valores naturales entre 1 y 4, se encuentra el valor del atributo I_j que puede predicarse de la definición localizada en el texto TC_k.

Conforme a los estándares propios del análisis de contenido, corresponde exhibir de modo transparente las decisiones adoptadas en la asignación de valores a las componentes de la intensión a partir de la evidencia empírica. No se detalla el proceso de construcción del total de filas sino de una porción de ellas (13 filas, ~40% del total), como muestra de los procedimientos. Las filas (y por lo tanto los textos) cuyos análisis se explicitan son elegidas aleatoriamente con una distribución discreta uniforme resultando así las filas 1, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 22, 24, 25, 27, 30, 32 (el detalle se anota en el punto 5.3 del Anexo).

3.6.1. La fila 1 de la matriz de intensión MI

Tomando la definición del texto TC01 del profesor Tom Apostol de la Universidad de California se observa que el intervalo sobre el que se define la función vectorial llamada α es explícitamente declarado como cerrado y finito. De modo que el valor de la celda correspondiente a la primera columna de la matriz de resultados debe ser ‘cerrado, finito’.

Figura 3. Gráfica de una curva suave por partes, versión original de TC01

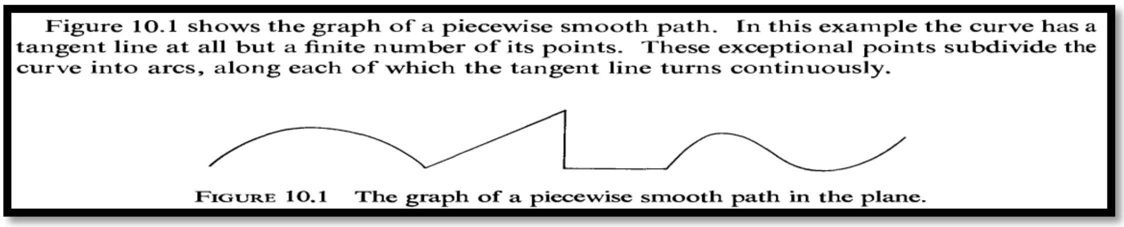


Figure 10.1 shows the graph of a piecewise smooth path. In this example the curve has a tangent line at all but a finite number of its points. These exceptional points subdivide the curve into arcs, along each of which the tangent line turns continuously.

FIGURE 10.1 The graph of a piecewise smooth path in the plane.

Fuente: Apostol (2001, 324)

Tomando el segmento de definición que establece que “Si α es continua en J la *gráfica* se llama *curva*”, unido al segmento que le precede que dice “Cuando *t* va tomando los valores de J, la función α(*t*) describe un conjunto de puntos en el *n*-espacio llamado *gráfica* de la función”, se observa que el autor está definiendo dos objetos diferentes, el que llama *gráfica* como el conjunto imagen de la función vectorial, independiente de su grado de regularidad en el intervalo J, mientras que *curva* es el nombre que le asigna al conjunto *gráfica* con la condición adicional de que la función vectorial sea continua en J. Naturalmente, una vez admitida la regularidad, la *gráfica* y la *curva* resultan ser el mismo conjunto.

Por otra parte, al terminar la definición, se dice que α recibe el nombre de *camino* (en realidad la asignación del nombre *camino* a la función vectorial se encuentra en la página siguiente, número 394 cuando define la regularidad de un camino). De aquí resulta que a la celda ubicada en la primera fila y segunda columna, le corresponde el valor “Continua, camino”, mientras que a la correspondiente celda de la cuarta columna debe asignársele el valor “Curva” equivalente al valor “Gráfica”, dada la supuesta continuidad. Finalmente, el espacio de llegada es R^n y, aunque no se explicita en la definición, es claro del contexto en el que reside, que se trata de R^n estructurado con la métrica euclídea dada por la expresión $d(x,y) = [\sum_{1}^{n} (x_k - y_k)^2]^{\frac{1}{2}}$, lo que se confirma en las primeras discusiones que cada texto dispone después de la definición, y que no se reproducen en este trabajo.

De esta manera, la celda de la tercera columna debe llenarse con el “espacio euclídeo R^n”, lo que completa el análisis de la intensión de la definición del texto T1, a lo largo de las cuatro componentes de la intensión. La fila queda, entonces, como lo indica la Figura 4, donde se ha sombreado la cuarta columna que es el lugar donde recae el nombre de *curva*[21].

Figura 4. Fila 1 de la matriz de intensión MI (Tom Apostol, Universidad de California)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC01	Cerrado, finito	Continua, camino	Euclídeo R^n	Gráfica = *Curva*

Fuente: elaboración propia

3.6.2. La fila 4 de la matriz MI

El parámetro *t* es introducido con un lenguaje cinemático, designando el instante que determina la posición de una partícula en el espacio, sin indicación alguna de su naturaleza, de modo que se asigna el valor "no se indica" a la primera componente I_1. De la función vectorial misma no se especifica su grado de regularidad y se la designa como 'ecuación paramétrica'. De esta manera, la segunda columna, correspondiente a la componente I_2, toma el valor "ninguna especificación, ecuación paramétrica". El espacio de llegada se asume el euclídeo $\mathbb{R}^3$ con métrica canónica, de modo que el valor que corresponde a la tercera columna es "Euclídeo $\mathbb{R}^3$". Finalmente, el conjunto de puntos es lo que se denomina *curva* ["punto que se mueve a lo largo de una curva en el espacio"], que es el valor adjudicado a la cuarta columna, resultando la siguiente fila.

Figura 5. Fila 4 de la matriz de intensión MI (Charles Edwards y David Penney, Universidad de Georgia)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC04	No se indica	Ninguna especificación, se llama ecuación paramétrica	Euclídeo R^3	*Curva*

Fuente: elaboración propia

Observación. El valor 'ninguna especificación' asignado a I_2 se corresponde con lo que el texto dice expresamente, omitiendo lo que podría presumirse desde la introducción intuitiva del autor de TC04 ["Piense en un punto que se mueve a lo largo de una curva en el espacio"], que al *pensar* la función como una correspondencia entre

[21] Observación: el análisis de las definiciones se realiza sobre la traducción del texto original, con los términos que han llegado a ser establecidos de uso corriente en el castellano. El párrafo en el idioma original de la definición analizada es "Let a be a vector-valued function defined on a finite closed interval J = [a, b]. As t runs through J, the function values α (t) trace out a set of points in n-space called the graph of the function. If α is continuous on J the graph is called a curve; more specifically, the curve described by α" (Apostol 2001, 323).

instantes y posiciones estaría sugiriendo una función continua y, posiblemente, con derivada continua (siempre que se esté *pensando* en la física clásica, claro). La inestabilidad de estas interpretaciones sustenta la decisión de asignar el valor que es explicitado (u omitido) en el texto mismo.

3.6.3. La fila 5 de la matriz MI

El texto del profesor H. S. Fedenko (Universidad de Moscú) define la curva sobre un intervalo que puede ser tanto abierto como cerrado, o también una combinación de ellos [“Sea I un intervalo, un segmento, o un intervalo semiabierto sobre la recta $\mathbb{R}$”], por lo que se asigna el valor “Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado” a la celda correspondiente a I_1. La definición de *curva* se alcanza de un modo indirecto, una vez definido *un* camino [“Llámese *camino* (o *curva parametrizada*) de la clase C^k en el espacio $\mathbb{R}^3$ a la función vectorial $\mathbf{r}$: $I \to \mathbb{R}^3$ de la clase C^k”] y una relación de equivalencia entre los caminos [“Dos caminos (I, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$) y (J, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$) de a clase C^k, donde I y J son intervalos, se denominan *equivalentes* si existe un difeomorfismo λ: $I \to J$ de la clase C^k tal que $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho}(\lambda(t))$”]. La *curva* queda definida como un conjunto de infinitos elementos: el de todos los caminos equivalentes a uno dado. La regularidad de la *curva* así definida es del mismo orden que la de un camino cualquiera que la represente (ya que la regularidad es un invariante de la clase de equivalencia), de modo que se le asigna genéricamente la regularidad de clase C^k. El texto no prohíbe el valor nulo para k, de modo que la *curva* podría ser solamente continua. El valor asignado, entonces, a la celda que caracteriza la componente I_2 de esta definición es “C^k, el par (I, **f**) se llama *camino*; la clase de equivalencia es la *curva*”.

Figura 6. Fila 5 de la matriz de intensión MI (Fedenko, Universidad de Moscú)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC05	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	C^k, el par (I, **f**) se llama *camino*; la clase de equivalencia es la *curva*	Euclídeo R^3	Imagen de la curva

Fuente: elaboración propia

El espacio de llegada es $\mathbb{R}^3$ con el sobrentendido de la métrica euclídea, por lo que “euclídeo $\mathbb{R}^3$” es el valor asignado a la componente I_3. Cualquiera de los caminos de la *misma* clase de equivalencia que compone la *curva* tiene como invariante la imagen a través de cualquiera de ellos del intervalo I donde se han definido todos [“Todos los caminos equivalentes que forman la curva dada tienen la misma imagen que se denomina *imagen de esta curva*"]. De allí que el valor asignado a I_4 sea "imagen de la curva"[22].

3.6.4. La fila 7 de la matriz MI

En el texto TC07 (Rafael Flax, Universidad de Buenos Aires) la función vectorial está definida en un subconjunto D de los reales ["$\overline{f}$: $D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ / $[a, b] \subset D$"] que incluye un intervalo cerrado, de modo que se asigna a I_1 el valor "conjunto que contiene un intervalo cerrado, finito o infinito", sin que el autor del texto aclare que el dominio D mismo deba ser un intervalo.

Figura 7. Fila 7 de la matriz de intensión MI (Rafael Flax, Universidad de Buenos Aires)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC07	Conjunto que contiene un intervalo cerrado [a, b], finito o infinito	Derivada continua no nula en (a, b), sin nombre particular	Euclídeo R^m	*Curva* suave o lisa

Fuente: elaboración propia

El grado de regularidad de la función vectorial es establecido en C^1 en el abierto (a, b), sin especificación de lo que pueda suceder en los restantes puntos de D, lo que da el valor a la componente I_3, mientras que el conjunto imagen de la función vectorial es denominado 'curva suave', que es el valor que se le asigna a I_4. El espacio de llegada es $\mathbb{R}^m$, sobrentendida la métrica canónica, de modo que corresponde el valor "euclídeo $\mathbb{R}^m$" a la componente I_3.

3.6.5. La fila 8 de la matriz MI

De la definición de TC08 (Erwin Kreyszig, Ohio State University) se observa que, del parámetro *t* sólo se dice que toma valores reales ["to each value t_0 of the real variable *t*"], sin especificarse si los debe tomar en un intervalo de naturaleza específica, por lo que en la correspondiente celda de la primera columna (I_1, Intervalo de definición), corresponde el valor 'no se indica'.

[22] Observación. Tras las definiciones anteriores, el autor comenta que muchas veces se acostumbra a llamar *curva* a *la imagen de la curva*, de modo que se necesitaría precisar, en cada caso, de cuál referencia es la que conviene según el contexto. Puesto que la matriz se construye con significados unívocos, se excluyen las ambigüedades del lenguaje que producen contradicciones.

Figura 8 Fila 8 de la matriz de intensión MI (Erwin Kreyszig, Ohio State University)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC08	No se indica	Ninguna especificación, se llama representación paramétrica	Euclídeo R^3	*Curva*

Fuente: elaboración propia

La misma ausencia de referencia en el intervalo sobre el que toma valores t puede observarse en la figura tomada del texto. Para la segunda columna, la correspondiente a la función vectorial, no hay ninguna especificación acerca de la continuidad o diferenciabilidad, [“by a vector function $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$”], de donde le corresponde el valor “ninguna especificación”.

Figura 9. Dos ejemplos de curva, tomados de TC08

Fig. 202. **Right-handed circular helix** **Fig. 203.** **Left-handed circular helix**

Fuente: Kreyszig (1993, 459)

En cuanto al nombre que se le adjudica a esta función, es explícitamente establecido por el autor [“is called a parametric representation of the curve C”], de modo que a la misma celda le corresponde añadir el nombre de “representación paramétrica de la curva C”. Finalmente, respecto al nombre que recibe el conjunto de puntos que devuelve la función vectorial cuando el parámetro *t* toma valores en el (no especificado) subconjunto de los números reales, es lo que recibe el nombre específico de “curva”, que es el valor que le corresponde a la cuarta columna [ya que “to each value t_0 of the real variable *t* there corresponds a point of C”].

3.6.6. La fila 9 de la matriz MI

El texto TC09 (L. D. Kudriávtsev, Universidad de Moscú) establece el intervalo de definición como un compacto, de modo que el valor en I_1 es “Intervalo cerrado, finito”. La función vectorial se fija como continua en ese intervalo [“$\mathbf{r}$: [a, b] $\rightarrow \mathbb{R}^3$ continua”]. La noción de curva es desarrollada en varias páginas (Kudriávtsev 1983, 276-284), quedando la curva definida por el par ordenado del conjunto imagen Γ y la función vectorial misma. De este modo [“una curva no es simplemente un conjunto del espacio, sino un conjunto analizado como resultado de cierta aplicación continua de un segmento”] corresponde que el valor de I_2 resulte “Continua, se llama representación, es una componente del par (Γ, f) que es la curva”. El espacio de llegada es el “euclídeo $\mathbb{R}^3$”, y el conjunto imagen se toma como la segunda componente del par ordenado que constituye la curva misma.

Figura 10. Fila 9 de la matriz de intensión MI (L. D. Kudriávtsev, Universidad de Moscú)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC09	Intervalo cerrado, finito	Continua, se llama *representación*, es una componente del par (Γ, f) que es la *curva*	Euclídeo R^3	*Portador* de la *Curva* que es un par ordenado (Γ, f)

Fuente: elaboración propia

El nombre que reciben los puntos de la curva es el de *portador*, y es introducido por el autor del texto al precisar que, en realidad, si la curva es un par ordenado, el punto del espacio es sólo una componente del par [“el conjunto {(P, *t*)} de todos los pares equivalentes –P está fijo– se llama punto de esta curva y el punto P del espacio, su portador” (Kudriávtsev 1983, 282)]. De allí que el valor de la componente I_4 resulte “*Portador* de la curva, que es un par ordenado (Γ, f)”.

3.6.7. La fila 13 de la matriz MI

En el texto TC13 del profesor Serge Lang (Yale University) se explicita con detalle que el intervalo donde ha de definirse la función vectorial puede ser de cualquier tipo [“Suponemos que el intervalo tiene más de un punto y puede contener a sus extremos”], de modo que el valor correspondiente a I_1 es, sobrentendiendo que se trata de un intervalo, “abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado”. Se observa que es el único texto que excluye la posibilidad de que el intervalo degenere en un punto.

Figura 11. Fila 13 de la matriz de intensión (Serge Lang, Yale University)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC13	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	Sin especificar regularidad, *curva*	Normado E	Sin nombre

Fuente: elaboración propia

La función vectorial se llama *curva* y no tiene una especificación acerca de su grado de regularidad [“Una función de un intervalo en un espacio vectorial normado, se considera, y se llama, una curva en el espacio”], por lo que el valor correspondiente a I_2 es “sin especificar regularidad, *curva*”, mientras que el espacio de llegada se estructura en normado (y luego en métrico con la distancia inducida por esa norma), por lo que el valor en I_3 es “normado E”. Finalmente, no hay nombre reservado para el conjunto imagen de la función, llevando I_4 el valor “sin nombre”.

3.6.8. La fila 22 de la matriz MI

El texto TC22 indica específicamente el intervalo real donde debe estar definida la función vectorial, es cerrado, finito y contiene más de un punto [“d’un segment [a, b], a < b, de l’axe des *t*”]. Luego corresponde a la primera columna el valor “cerrado, finito”.

Figura 12. Fila 22 de la matriz de intensión MI (M. Postnikov, Universidad de Moscú)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC22	Cerrado, finito	Continua*, Curva*	Euclídeo o afín E (*n*)	Soporte (*support*)

Fuente: elaboración propia

La función vectorial misma debe ser continua [“l’application continue”] y es esta misma aplicación la que recibe el nombre de *curva* [“On appelle *courbe continue* dans l’espace euclidien (ou affine) E de dimension *n* l’application continue”], de modo que a la segunda columna le corresponde el valor “continua, curva”. El espacio de llegada es el espacio euclídeo o bien un espacio afín inducido [“dans l’espace euclidien (ou affine) E de dimension *n*”], de allí el valor “Euclídeo o afín (*n*) de la tercera columna. Finalmente, el conjunto imagen de la función vectorial es denominado “soporte”, que es el valor asignado a la cuarta columna [“On appelle des fois *support* de la courbe l’ensemble de tous ses points, i.e. l’image de [a, b]”].

3.6.9. La fila 24 de la matriz MI

El texto TC24 de la profesora Hebe Rabuffetti (Universidad Tecnológica Nacional) define la función vectorial [“$f: [a, b] \to \mathbb{R}^n$”] de tal modo que corresponde asignar a I_1 el valor “cerrado, finito”, mientras que a I_3 el valor “euclídeo $\mathbb{R}^n$”, y se le pide su continuidad [“Si f es una función vectorial continua”], de modo que el valor de

I_2 debe ser "continua, *trayectoria*". La imagen a través de la función vectorial es lo que se denomina *curva* ["su recorrido es una curva en el espacio de puntos (o vectores) $\mathbb{R}^n$… Estas curvas suelen llamarse "curvas puntuales], de manera que corresponde el valor "*curva puntual*" a I_4.

Figura 13. Fila 24 de la matriz de intensión MI (Hebe Rabuffetti, Universidad Tecnológica Nacional)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC24	Cerrado, finito	Continua, *trayectoria*	Euclídeo R^n	*Curva puntual*

Fuente: elaboración propia

El nombre de *trayectoria* adjudicado a la función vectorial en I_2 se desprende de la posterior discusión acerca del concepto de curva ["si bien para cuestiones geométricas puede alcanzar el estudio de la curva puntual…, en general se necesita la trayectoria, o sea, es necesario considerar la función vectorial asociada" (Rabuffetti 1991, 298)].

3.6.10. La fila 25 de la matriz MI

El matemático español Julio Rey Pastor, doctorado en Madrid y perfeccionado en Berlín y Göttingen impulsó la investigación matemática en la Argentina, donde se radicó desde que fuera invitado en 1917 (de Asúa 2010, Babini 1986). Su texto clásico TC25, obra en colaboración con los profesores Pedro Pi Calleja y César Trejo (Universidad de Buenos Aires), declara que el intervalo de definición de la función vectorial puede ser tanto finito como infinito, que es el valor que se asigna a I_1 ["al variar u en un intervalo finito o infinito"]. La función misma debe ser continua ["descrito por tres funciones continuas… se obtiene su *representación vectorial*"], de modo que el valor de I_2 es "continua, *representación particular*".

Figura 14. Fila 25 de la matriz de intensión MI (Julio Rey Pastor, Pedro Pi Calleja, César Trejo, Universidad de Buenos Aires)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC25	Finito o infinito	Continua, *representación vectorial*	Euclídeo R^3	*Curva*

Fuente: elaboración propia

El espacio de llegada es establecido como euclídeo E_3, de modo que en la notación adoptada para la matriz de datos, corresponde el valor "euclídeo $\mathbb{R}^3$". La *curva* en E_3 es el conjunto de puntos del espacio que es la imagen a través de su representación vectorial del intervalo donde toma valores el parámetro *u*, de modo que a I_4 se le asigna el valor "*curva*".

3.6.11. La fila 27 de la matriz MI

Figura 15. Fila 27 de la matriz de intensión Luis Santaló, Universidad de Buenos Aires)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC27	Intervalo sin especificar	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*

Fuente: elaboración propia

No hay, en el texto TC27, una especificación del tipo de intervalo ["cuando *t* varía en un intervalo"] ni de la regularidad de la función ["sean funciones de un parámetro *t*"], el espacio de llegada es $\mathbb{R}^3$ y la imagen de la función recibe el nombre de *curva* ["el punto X describe una *curva*"]. De allí resultan las asignaciones indicadas en la figura.

3.6.12. La fila 30 de la matriz MI

El texto TC30 indica que *t* recorre los valores de un subconjunto de los números reales ["$t \in J \subset \mathbb{R}$"], sin especificar el tipo de subconjunto que sea el mismo J. Sin embargo, se asume aquí que J es un intervalo por ser usualmente una letra muy utilizada para designar intervalos, en el universo de discurso de la autora. De allí que se asigne a I_1 el valor "intervalo, sin especificar", dado que no se aclara la pertenencia de los extremos del supuesto intervalo, ni tampoco hay mención alguna a su acotación.

Figura 16. Fila 30 de la matriz de intensión MI (Vera W. de Spinadel, Universidad de Buenos Aires)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC30	Intervalo, sin especificar	Continua y no constante, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva, gráfica, grafo*

Fuente: elaboración propia

La función vectorial tiene componentes que son ["funciones continuas y no todas constantes"], sin que se las denomine de manera especial, por lo que el valor de I_2 es "Continua y no constante, sin nombre particular". El espacio de llegada es el euclídeo

$\mathbb{R}^3$ y la imagen de la función recibe tres nombres que se dan como sinónimos y que se adjudican a I_4, esto es “*curva, gráfica, grafo*”.

3.6.13. La fila 32 de la matriz MI

En este caso no hay indicación alguna del intervalo donde toma valores el parámetro *t* [“It is a function of the parameter t, which often represents time”], por lo que se adjudica el valor “no se indica” a la primera columna de esta fila. Tampoco hay mención al tipo de regularidad de la función vectorial que define la curva [“At each time t, the position vector **R**(t) locates the moving body: **R**(t) =x(t) **i** + y(t) **j** + z(t) **k**.”], y no se le adjudica un nombre propio, de modo que la segunda columna toma el valor “sin especificar regularidad”.

Figura 17 Fila 32 de la matriz de intensión MI (Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC32	No se indica	Sin especificar regularidad	Euclídeo R^3	*Curva*

Fuente: elaboración propia

Que el espacio de llegada es tridimensional surge de la misma definición de la función, y su estructura se supone euclídea con métrica canónica por el contexto del libro, de donde el valor de la tercera columna es “Euclídeo R^3”.

Figura 18. La curva se ‘ve’ en el espacio, marcada por el instante *t*. Reproducción de TC32

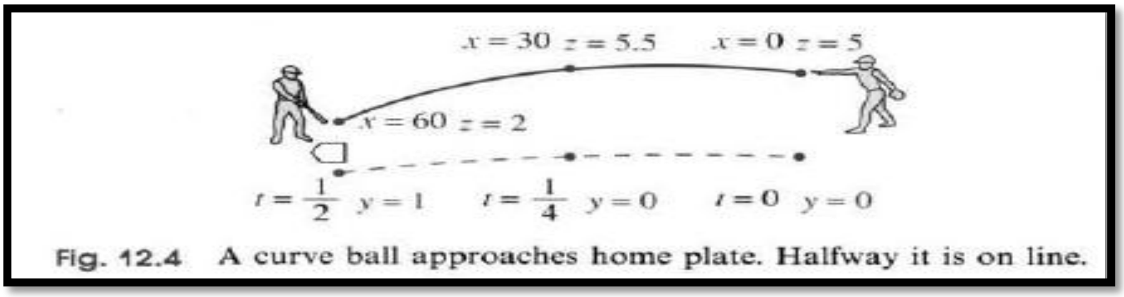


Fig. 12.4 A curve ball approaches home plate. Halfway it is on line.

Fuente: Strang (2009, 451)

La cuarta columna, que indica el conjunto imagen a través de la función vectorial del intervalo donde toma valores el parámetro *t*, se llama *curva* “the position vector **R**(t) locates the moving body: **R**(t) =x(t) **i** + y(t) **j** + z(t) **k**. As t varies, these points trace out a ***curve in space.***”], que es el valor asignado a esta celda. El mismo autor, para reforzar la idea, ilustra en la figura reproducida el conjunto de puntos que constituyen las sucesivas posiciones en el espacio, determinadas cada una por un instante *t*, como se aprecia en la secuencia en la que cada posición está etiquetada con un valor de *t*.

3.7. Característica y construcción de la matriz de intensión MI* (26×4)

La matriz de datos correspondiente a los textos de cálculo no citados en la Argentina se completa de la misma manera que lo explicado en el apartado anterior, asignando un valor a cada una de las celdas definidas por el producto cartesiano T*C × I. La ‘característica de esta matriz es, ahora (m, n, r) = (26, 4, 3) (Galtung 1978, 4). En la fila T^*C_k columna I_j, con ‘k’ tomando los valores naturales entre 1 y 26, ‘j’ tomando los valores naturales entre 1 y 4, se encuentra el valor del atributo I_j que puede predicarse de la definición localizada en el texto T^*C_k. No se detalla el proceso de construcción del total de filas sino de una porción de ellas (10 filas, poco más de un tercio del total), como muestra de los procedimientos.   Las filas (y por lo tanto los textos) cuyos análisis se explicitan son elegidas aleatoriamente con una distribución discreta uniforme resultando así las filas 1, 2, 4, 5, 6, 8, 14, 16, 18, 22 (el detalle en el punto 5.3. del Anexo).

3.7.1. La fila 1 de la matriz de intensión MI*

El dominio de la función vectorial es un intervalo [“where I is an interval of the number line ℝ”] del que no se especifica su naturaleza, luego el valor de I_1 es “intervalo, sin especificar”. La regularidad de la función es puesta en C^∞ [“a smooth (infinitely differentiable) regular map x: $I \to E^n$”], y recibe el nombre de *curva parametrizada* [“A parametrized curve”], correspondiendo entonces a I_2 el valor “Suave, clase C^∞, *curva parametrizada*.

Figura 19. Fila 1 de la matriz de intensión MI* (Alekseevskij, D., A. Vinogradov, y V. Lychagin, Universidad de Moscú)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C01	Intervalo, sin especificar	Suave (smooth, clase C^∞), *curva parametrizada*	Euclídeo E^n	Sin nombre

Fuente: elaboración propia

El espacio de llegada es euclídeo de dimensión n, y no se menciona de manera especial a la imagen de la función vectorial [“in Euclidean space E^n of n dimensions”], de manera que la componente I_3 lleva el valor “euclídeo E^n”, mientras que I_4, el valor “sin nombre”.

3.7.2. La fila 2 de la matriz de intensión MI*

En T*C02 se presta especial atención al carácter del intervalo donde se define la función vectorial, en realidad para declarar que puede ser de cualquier tipo [“We shall not assume always that the interval is open. Sometimes it is even important that the interval be closed. In particular, the interval can be unbounded and can coincide with the entire real axis”], de allí que el valor asignado a I_1 resulte “Finito o infinito, abierto, cerrado, semiabierto, etcétera”.

Figura 20. Fila 2 de la matriz de intensión MI* (Paul Blaga, Stanford University)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C02	Finito o infinito, abierto, cerrado, semiabierto, etc.	Clase C^k, C^k *curva parametrizada*, (*path* = camino, trayectoria) compacto, abierto o no	Euclídeo R^3	Sin nombre

Fuente: elaboración propia

La función misma tiene una regularidad tal que es al menos diferenciable [“A C^k (k > 0) parameterized curve”], se denomina *curva parametrizada*, o *path* (camino, trayectoria) y tiene además un segundo nombre que califica el tipo de intervalo donde se define [“The path is called compact, half-open or open, if the interval I is, respectively, compact, half-open or open”], lo que permite asignar a I_2 el valor “Clase C^k, C^k curva parametrizada, (path = camino, trayectoria) compacto, abierto o semiabierto”. El valor de I_3 es explicitado como el “euclídeo $\mathbb{R}^3$” y no se especifica nombre alguno para la imagen del camino, de allí el valor “sin nombre” asignado a I_4.

3.7.3. La fila 4 de la matriz de intensión MI*

Para el caso del texto T*C04, no hay ninguna especificación acerca del intervalo en el que toma valores el parámetro *t* [“to each admissible value of a scalar t (usually, but not necessarily, the time)”], por lo que la primera columna es “no se indica”. De la función vectorial, llamada **A** por el autor, no hay ninguna precisión respecto a su regularidad ["Here we confine ourselves to the case of a vector function of a scalar argument, i.e., a rule assigning a unique value of a vector **A** to each admissible value of a scalar t"], luego el valor de la segunda columna es "sin especificar regularidad".

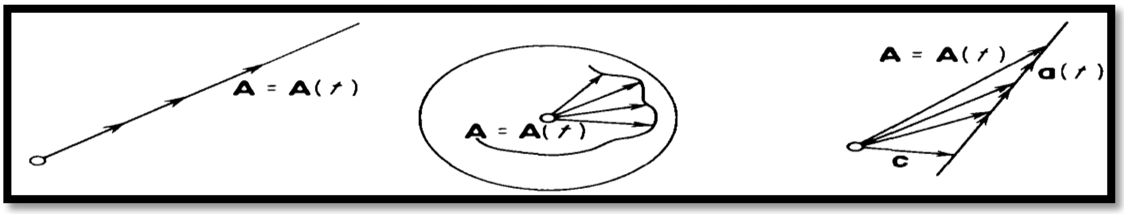
Figura 21. Fila 4 de la matriz de intensión MI* (Borisenko y Tarapov, In translation version of the Russian original, University of California, Berkeley UCB)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C04	No se indica	Sin especificar regularidad	Euclídeo R^3	*Curva, hodógrafa*

Fuente: elaboración propia

El espacio de llegada se asume el espacio euclídeo con la métrica canónica por el contexto en que se desarrolla el libro, de modo que a la tercera columna le corresponde el valor "Euclídeo R^3". El conjunto imagen es denominado por el autor como *curva* (también como hodógrafa) ["Suppose the vector **A** = **A**(t) is drawn from a fixed point O. Then as t varies, the end point of A traces out a curve called the *hodograph* of **A**."]. Luego la celda de la cuarta columna tiene el valor "curva, hodógrafa". En la Figura 22 aquí reproducida se observa el carácter de conjunto de puntos asignado a la curva, en distintas situaciones según lo que le suceda a la norma y dirección del vector imagen.

Figura 22. Algunas curvas ejemplificadas, tomadas del texto *Vector and Tensor Analysis with Applications*



Fuente: Borisenko y Tarapov (1979, 35)

Los autores introducen la figura para ilustrar que, si bien toda función vectorial que mantiene fija su dirección modificando su norma dibuja una curva recta, la recíproca es falsa, dado que puede resultar una recta definida por una función vectorial en la que varíen tanto la norma como la dirección.

3.7.4. La fila 5 de la matriz de intensión MI*

El intervalo en que se define la función es abierto ["of *t* for $a < t < b$"], de modo que se adjudica el valor "abierto, finito o infinito" a la componente I_1. La función recibe el nombre de representación paramétrica, y se dice que continua y biyectiva ["The parametric representation constitutes a 1-1 continuous mapping"], de modo que el valor I_2 es "continua, se llama representación paramétrica".

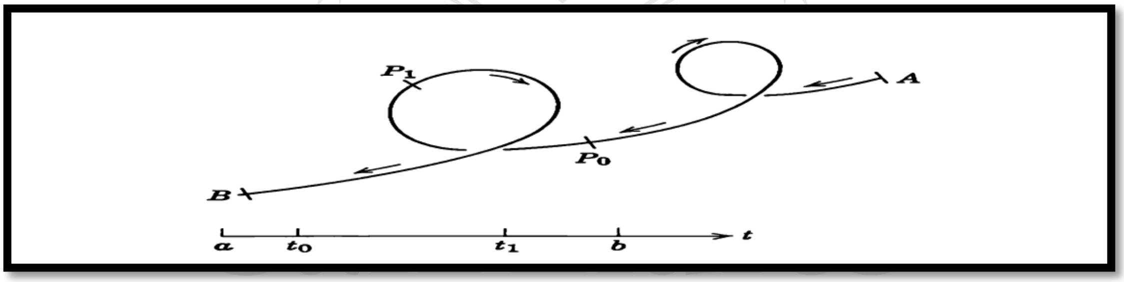
Figura 23. Fila 5 de la matriz de intensión MI* (Richard Courant y Fritz John, New York University)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C05	Abierto, finito o infinito	Continua, se llama representación paramétrica	Euclídeo R^3	*Curva, arco*

Fuente: elaboración propia

El espacio de llegada es $\mathbb{R}^3$ con la métrica canónica sobrentendida, por lo que el valor adjudicado a I_3 es "euclídeo, $\mathbb{R}^3$". Finalmente, el conjunto Γ que es la imagen a través de la biyección del intervalo (a, b) es lo que se denomina *curva* o arco de curva, que es el valor asignado a I_4. La curva y su representación paramétrica son cuidadosamente distinguidas ["The same simple arc Γ has many different parametric representations"].

Figura 24. La orientación negativa de un arco a través del sentido decreciente de *t*



Fuente: *Introduction at Calculus and Analysis. Volume two* (Courant y John 1974, 87)

Vale señalar que la biyectividad de la función vectorial exigida por los autores les es necesaria para introducir una orientación en el arco Γ, pues entonces sólo existen dos formas de recorrer el conjunto: con *t* creciente (positivamente orientado, Γ*) y con *t* decreciente (negativamente orientado –Γ*). De esta manera el arco orientado no se limita al conjunto de puntos, sino que necesita de una representación paramétrica. Los autores introducen la figura para mostrar un arco cuya orientación se sugiere por las flechas sobre la curva, que pretenden indicar que cuando el parámetro *t* recorre los valores de *a* hasta *b*, pasando por t_0 y t_1 (en ese orden), las imágenes recorren la curva desde A hasta B pasando por P_0 y luego por P_1.

3.7.5. La fila 6 de la matriz de intensión MI*

El valor "no se indica" se adjudica a I_1, y se denomina *curva* a la función vectorial misma ["A curve γ in n space is a mapping or transformation from $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^n$"] sin especificación alguna respecto a la regularidad de la función, por lo que el valor en I_2 es "sin especificar regularidad, *curva*".

Figura 25. Fila 6 de la matriz de intensión MI* (Robert Creighton Buck y Ellen Buck, University of Wisconsin)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C06	No se indica	Sin especificar regularidad, *curva*	Euclídeo R^n	*Traza* (trace)

Fuente: elaboración propia

La imagen de la función se halla en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, que es el valor que adopta I_3. La imagen misma, recibe el nombre de traza ["The set of all points which lie on y is called the trace of γ"], que es el valor asignado a I_4. Los autores remarcan la diferencia entre los dos objetos, por un lado la función vectorial, y por el otro su conjunto imagen denotado por γ ["It is important to keep in mind the fact that the curve is the transformation and not the set of points lying on γ."].

3.7.6. La fila 8 de la matriz de intensión MI*

En el texto de los profesores del Instituto Tecnológico de Bombay, el intervalo en que se define la función se establece como cerrado ["of an interval $[\alpha, \beta]$"], de modo que se adjudica el valor "cerrado, finito" a la componente I_1. La función recibe el nombre de curva ["consider a curve C given by $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, where the functions x and y are differentiable"], y se añade la petición de diferenciabilidad, de allí el valor "Diferenciable, *curva* C" a la componente I_2.

Figura 26. Fila 8 de la matriz de intensión MI*(Ghorpade y Limaye, Indian Institute of Technology Bombay)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C08	Cerrado, finito	Diferenciable, *curva C*	Euclídeo R^2	Imagen de la curva C

Fuente: elaboración propia

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ es el lugar donde reside la imagen de la curva C que es el valor de I_4. Los autores puntualizan la distinción entre la curva C y su imagen, que no debieran ser confundidas [“The curve *C* should not be confused with its image $\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [\alpha, \beta]\}$”] .

3.7.7. La fila 14 de la matriz de intensión MI*

Se omite cualquier indicación respecto al conjunto donde tome valores el parámetro *t*, de modo que el valor en I_1 es “no se indica”. La función misma toma indistintamente el nombre de curva, camino o trayectoria [“Let C be a path”] y se le pide la diferenciabilidad, de donde el valor para I_2 es “Curva, camino o trayectoria suave (de clase C^1)”. El espacio de llegada es el euclídeo $\mathbb{R}^2$ y no se asigna nombre a la imagen de C.

Figura 28. Fila 14 de la matriz de intensión MI* (Wilfred Kaplan y Donald Louis, University of Michigan, University of California, Los Angeles UCLA)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C14	No se indica	Curva, camino o trayectoria suave (de clase C^1)	Euclídeo R^2	Sin nombre

Fuente: elaboración propia

3.7.8. La fila 16 de la matriz de intensión MI*

El texto de los profesores de la Universidad de Lille indica que el intervalo en el que se define la función es compacto, que en la recta real equivale a un acotado y cerrado, que es el valor adjudicado a la componente I_1 [“d'un intervalle compact [a, b]”].

Figura 28. Fila 16 de la matriz de intensión MI* (Daniel Lehmann y Rudolphe Bkouche, Université des Sciences et Techniques de Lille)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C16	Cerrado, finito (más general, en un compacto)	Continua, *curva parametrizada* (en el espacio métrico)	Métrico	*Soporte* (support), de todas las clases de equivalencia de una curva parametrizada

Fuente: elaboración propia

En cuanto a la función, se pide su continuidad [“toute application continue $\gamma : [a, b] \to X$”] y se le llama *curva parametrizada* [“rappelons qu'on appelle *courbe paramétrée*”] en el espacio métrico X en el devuelve su imagen. De este modo, I_2 toma el valor "continua, *curva parametrizada* (en el espacio métrico), mientras que I_3 el valor "métrico". La imagen de la curva recibe el nombre de *soporte*, entendida más bien como la imagen de todas las parametrizaciones equivalentes dadas por una reparametrización admisible; tal es el valor asignado a la componente I_4.

3.7.9. La fila 18 de la matriz de intensión MI*

Para el texto T*C18, el intervalo de definición es indicado expresamente como abierto en la definición ["Let *I* be an open interval in the real line *R* […] from an open interval *I*"], pero está precedido por un párrafo en el que se asume, previamente, cierta soltura en su naturaleza, pudiendo ser acotado o no ["We shall interpret this liberally to include not only the usual finite open interval $a < t < b$ (a, b real numbers), but also the infinite types $a < t$ (a half-line to $+\infty$), $t < b$ (a half-line to $-\infty$), and also the whole real line"]. De estas consideraciones resulta que el valor de la celda correspondiente a la primera columna debe ser "abierto, finito o infinito".

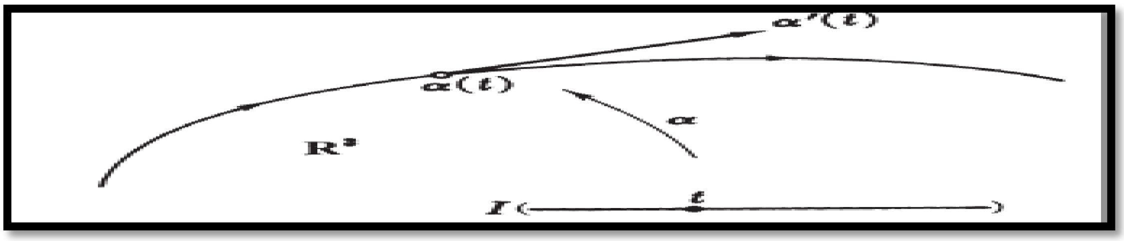
Figura 29. Fila 18 de la matriz de intensión MI* (Barret O'Neill, University of California, Los Angeles)

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C18	Abierto, finito o infinito	Diferenciable, *Curva*	Euclídeo R^3	Sin nombre

Fuente: elaboración propia

En lo que respecta al carácter de la función vectorial, se exige expresamente su diferenciabilidad en el intervalo I; a la función misma se le da el nombre de *curva* y se la designa con la letra α ["A *curve* in $\mathbf{R}^3$ is a differentiable function $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^3$"]. La segunda columna, entonces, toma el valor "Diferenciable, *curva*".

Figura 30. La *curva* y su imagen en *Elementary Differential Geometry*



Fuente: O´Neill (2006, 18)

El espacio de llegada se estructura como euclídeo en R^3 del contexto de la exposición, aunque no se explicite en la definición, de allí que el valor de la tercera columna resulte "Euclídeo R^3"; finalmente, ningún nombre se adjudica a la imagen a través de la función vectorial del intervalo de definición I, por lo que el valor de la cuarta columna es "Sin nombre".

3.7.10. La fila 22 de la matriz de intensión MI*

El texto del profesor Struik del Instituto Tecnológico Massachusetts especifica que el parámetro u recorre un intervalo cerrado, lo que da el valor a la componente I_1. La función misma no tiene una especificación acerca de la regularidad, más allá de la que podría inducir la introducción intuitiva de pensar la trayectoria de un punto móvil, de modo el valor de I_2 se traduce en "sin especificar regularidad, sin nombre particular". El espacio de llegada es el euclídeo $\mathbb{R}^3$ que da el valor I_3, y la curva misma es la imagen de la función.

Figura 31. Fila 22 de la matriz de intensión MI* (Dirk Struik, Massachusetts Institute of Technology)

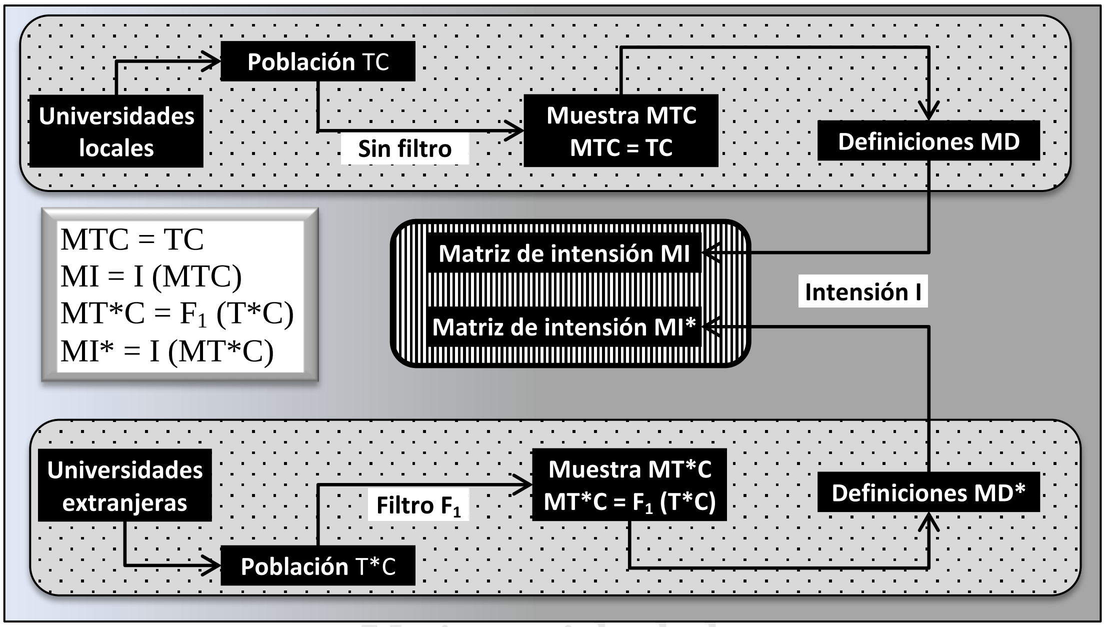
	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C22	Cerrado, finito	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*

Fuente: elaboración propia

3.8. Estructura lógica de materiales y métodos

Puede resumirse la lógica secuencial de la obtención de las matrices de intensión MI (textos citados en la Argentina) y MI* (textos no citados en la Argentina) siguiendo las dos líneas de producción y organización de datos. La primera recoge la población TC de textos que habitan las bibliografías pertinentes de universidades locales y de esa misma población completa (sin filtro, muestra MTC = TC) extrae las definiciones de *curva* en la matriz MD sobre la que aplica la función *intensión* I produciendo así la matriz de intensiones MI. La segunda línea releva la población T*C de textos que habitan las bibliografías pertinentes de las principales universidades extranjeras clasificadas según criterios bibliométricos de donde extrae una muestra de tamaño 75% de la población mediante el filtro aleatorio ($MT^*C = F_1$ (T^*C)) de donde recoge las definiciones de *curva* en la matriz MD* sobre la que aplica la función *intensión* I produciendo así la matriz de intensiones MI*. Según esta metodología, los análisis efectuados sobre la matriz MI resultan en proposiciones válidas para la población completa de textos locales TC, mientras que las proposiciones que se derivan de la matriz MI* solo sirven de argumentos de entrada para producir inferencias estadísticas acerca de la población de textos T*C. La Figura 32 representa esquemáticamente estos procesos.

Figura 33. Estructura lógica de materiales y métodos: las dos líneas de producción de las matrices de intensiones MI y MI* a través de las diversas operaciones



Fuente: elaboración propia

Sobre la matriz así obtenida, y con las categorías de lectura establecidas en el entorno conceptual se aplican las técnicas propias del análisis de contenido a las unidades de análisis de cada celda (Krippendorff 1990, Leray 2008, Neuendorf 2012, R. Weber 2012) para producir y discutir los resultados que se presentan en la siguiente sección.

4. Resultados y discusión

En esta sección se presentan los resultados agrupados en dos secciones, tras lo cual una breve conclusión. Una primera, describe las divergencias obtenidas en la lectura a lo largo de los distintos textos. La segunda, analiza las consecuencias que surgen de tales divergencias, tanto en el plano matemático como en el cognitivo.

4.1. La matriz de intensión MI (33×4)

Extendiendo las técnicas detalladas para las seleccionadas filas en el apartado 3.6 al resto de las filas se llega finalmente a la matriz de intensión que se ha denominado MI, correspondiente a los textos citados en la Argentina. En la celda que se halla en la fila k, columna q, se lee el valor que toma la componente q-ésima de la intensión I sobre la definición de curva relevada en el texto de la fila k, esto es TC_k. Las celdas sombreadas son las que adjudican el nombre *curva* a un objeto específico de la fila

Matriz 6. La matriz de intensión MI (33 × 4) con las componentes de la intensión que define a las curvas en cada libro de texto.

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
TC01	Cerrado, finito	Continua, camino	Euclídeo R^n	Gráfica = *Curva*
TC02	Cerrado, finito	Continua, *curva*	Euclídeo R^3	Sin nombre
TC03	Cerrado, finito	Continua, *curva*	Euclídeo R^3	Imagen de la curva
TC04	No se indica	Ninguna especificación, se llama ecuación paramétrica	Euclídeo R^3	*Curva*
TC05	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	C^k, el par (I, **f**) se llama camino; la clase de equivalencia es la *curva*	Euclídeo R^3	Imagen de la curva
TC06	No se indica	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^n	*Curva*
TC07	Conjunto que contiene un cerrado	Derivada continua no nula, sin nombre particular	Euclídeo R^m	*Curva* suave o lisa
TC08	No se indica	Ninguna especificación, se llama representación paramétrica	Euclídeo R^3	*Curva*
TC09	Intervalo cerrado, finito	Continua, representación, es una componente del par (Γ, f) que es la *curva*	Euclídeo R^3	*Portador* de la *Curva* que es un par ordenado (Γ, f)
TC10	No se indica	Ninguna especificación, función vectorial del argumento *t*	Euclídeo R^3	*Curva*, *imagen geométrica*, *gráfico* de la función vectorial
TC11	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	Sin especificar regularidad, *Curva parametrizada*	Euclídeo R^n	Sin nombre
TC12	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	Sin especificar regularidad, *curva parametrizada*	Euclídeo R^n	Sin nombre
TC13	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	Sin especificar reg., *curva*	Normado E	Sin nombre
TC14	No se indica	Sin especificar regularidad, es un componente de la *curva*	Euclídeo R^3	Gráfica, es uno de los componentes de la *curva*
TC15	No se indica	Sin especificar, se llama *ecuaciones paramétricas*	Euclídeo R^2	*Curva*, *gráfica* de las ecuaciones paramétricas
TC16	Intervalo, sin especificación	Clase C^1 con derivada nunca nula, *representación paramétrica*. La *curva* es la clase de equivalencia	Euclídeo R^n	Sin nombre

TC17	Cerrado, finito	Sin especificar la regularidad, se llama *trayectoria*	Euclídeo R^n	*Curva*
TC18	Intervalo, sin especificar	Sin especificar, *trayectoria*	Euclídeo R^2, R^3	*Curva*
TC19	Cerrado, finito	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^2	*Curva*
TC20	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	Continua, se llama *camino* o *trayectoria*	Euclídeo R^n	*Curva* o *Traza* del camino
TC21	Abierto, finito o infinito	Aplicación topológica, sin nombre particular	Normado R^3	*Curva elemental*
TC22	Cerrado, finito	Continua*, Curva*	Euclídeo o afín	Soporte (*support*)
TC23	Cerrado (por lo general)	Continua, *ecuación paramétrica*	Euclídeo R^2	Curva
TC24	Cerrado, finito	Continua, sin nombre particular	Euclídeo R^n	*Curva*
TC25	Finito o infinito	Continua, se llama *representación paramétrica*	Euclídeo R^3	*Curva*
TC26	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	Diferenciable, *parametrización*	Euclídeo R^3	*Curva* diferenciable, *trayectoria*
TC27	Intervalo, sin especificación	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*
TC28	No se indica	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^2	*Curva*
TC29	No se indica	Continua y no constante, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*
TC30	Intervalo, sin especificar	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva, gráfica, grafo*
TC31	Abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado	Continua, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*
TC32	No se indica	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*
TC33	Intervalo, sin especificar	Sin especificar regularidad, se llama *parametrización*	Euclídeo R^3	*Curva, trayectoria*

Fuente: elaboración propia

4.2. La matriz de intensión MI* (26×4)

Extendiendo las técnicas detalladas para las seleccionadas filas en el apartado 3.7 al resto de las filas devuelve finalmente la matriz de intensión MI*. En la celda que se halla en la fila k, columna q, se lee el valor que toma la componente q-ésima de la intensión I sobre la definición de curva relevada en el texto de la fila k, esto es T^*C_k. Las celdas sombreadas son las que adjudican el nombre *curva* a un objeto específico de la fila. Por ejemplo, para el texto T*C03, corresponde llamar *curva* (fila 3, columna 4) a la imagen de una aplicación continua (fila 3, columna 2) de un intervalo abierto (fila3, columna 1) sobre un espacio euclídeo de R^3 (fila 3, columna 3).

Matriz 7. La matriz de intensión MI* (26 × 4) con las componentes de la intensión que define a las curvas en cada libro de texto.

	I_1. Intervalo de definición	I_2. La función vectorial f	I_3. Espacio de llegada	I_4. La imagen de f
T*C01	Intervalo, sin especificar	Suave (smooth, clase C^∞), *curva parametrizada*	Euclídeo R^n	Sin nombre
T*C02	Finito o infinito, abierto, cerrado, semiabierto, etc.	Clase C^k, *curva parametrizada* (o *path* = camino, trayectoria)	Euclídeo R^3	Sin nombre
T*C03	Intervalo abierto	Continua, sin nombre particular	Euclídeo R^2	*Curva*
T*C04	No se indica	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva, hodógrafa*
T*C05	Abierto, finito o infinito	Continua, se llama representación paramétrica	Euclídeo R^3	*Curva, arco*
T*C06	No se indica	Sin especificar regularidad, *curva*	Euclídeo R^n	*Traza* (trace)
T*C07	No se indica	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^m	*Curva*
T*C08	Cerrado, finito	Diferenciable, *curva C*	Euclídeo R^2	Imagen de la curva C
T*C09	Abierto, finito o infinito	Suave (smooth) *curva*	Euclídeo R^2	Sin nombre
T*C10	Finito o infinito	Sin especificar regularidad, *función de coordenadas*	Euclídeo R^2	*Curva*
T*C11	Sin especificar	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^m	*Curva* en R^{m+1}, con una proyección sobre R^m, que es una *curva* en R^m
T*C12	Cerrado, finito	Derivadas continuas, *ecuaciones paramétricas*	Euclídeo R^2	*Curva*
T*C13	Cerrado, finito	Sin especificar regularidad, se llama parametrización	Euclídeo R^3	*Curva*
T*C14	No se indica	Camino o trayectoria suave (de clase C^1)	Euclídeo R^2	*Curva*
T*C15	Intervalo, sin especificar	La *curva* es la aplicación siempre que sea una *inmersión* (, continua)	Euclídeo R^n	Sin nombre
T*C16	Cerrado, finito (más general, en un compacto)	Continua, *curva parametrizada* (en el espacio métrico)	Métrico en general	*Soporte* (support), de todas las clases de equivalencia de una curva parametrizada
T*C17	Abierto, finito o infinito	Clase C^∞, *curva diferenciable*	Euclídeo R^3	Sin nombre
T*C18	Abierto, finito o infinito	Diferenciable, *Curva*	Euclídeo R^3	Sin nombre
T*C19	Abierto, finito o infinito	Sin especificar regularidad, *curva parametrizada*	Euclídeo R^n	Sin nombre
T*C20	Sin indicar	Continua, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*
T*C21	Cerrado, finito	*Curva* (inmersiones: diferenciables con derivada nunca nula)	Euclídeo R^2	Sin nombre
T*C22	Cerrado, finito	Sin especificar regularidad, sin nombre particular	Euclídeo R^3	*Curva*
T*C23	Cerrado, finito (o una circunferencia)	Homeomorfismo biyectivo C^k, $k \geq 1$, sin nombre particular	Euclídeo R^2, R^3	*Curva* k-diferenciable (para k =1 la curva es suave)
T*C24	Cerrado, finito	Continua, la *curva* (o arco de *curva*) es una clase de equivalencia topológica	Normado (E, ||)	Sin nombre

T*C25	Intervalo, sin especificar	Clase C^k, la *curva* es la aplicación	Afín euclídeo	Imagen
T*C26	Intervalo, sin especificar	La aplicación es el *camino* y es continua	Euclídeo R^3	Sin nombre

Fuente: elaboración propia

4.3. Aspectos descriptivos

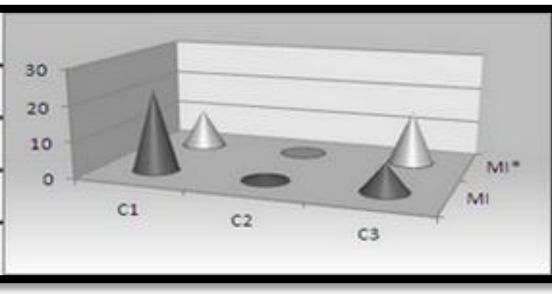
Un primer resultado de la observación directa es que el objeto designado con la palabra *curva* (*courbe*, *kurve*, *curva*) por el conjunto de textos no es el mismo, sea que se los tome solo de la matriz MI, solo de MI* o de ambos en conjunto. Sea C la variable clasificatoria de tres componentes C = (C_1, C_2, C_3) que queda definida según qué objeto quede comprendido en la denotación de *curva*; del examen de las matrices de intensión resulta que bastan tres categorías para introducir una clasificación de los textos según esa dimensión. Se define que un dado texto pertenece a la clase C_1 si designa como *curva* a un conjunto de puntos, pertenece a la clase C_2 si su designado es un par ordenado compuesto por una aplicación y un conjunto de puntos, y finalmente pertenece a la clase C_3 si llama *curva* a la aplicación misma. Se denomina C_k (MI) al conjunto de los textos de MI que pertenecen a la categoría k, con k =1, 2, 3, mientras que C_k (MI*) es su equivalente en MI*. Del análisis de las matrices MI y MI* quedan definidos los siguientes conjuntos.

C_1 (MI) = {TC01, TC04, TC06, TC07, TC08, TC10, TC15, TC17, TC18, TC19, TC20, TC21, TC23, TC24, TC25, TC26, TC27, TC28, TC29, TC30, TC31, TC32, TC33}; C_2 (MI) = {TC09, TC14}; C_3 (MI) = {TC02, TC03, TC05, TC11, TC12, TC13, TC16, TC22}; C_1 (MI*) = {T*C03, T*C05, T*C07, T*C10, T*C11, T*C12, T*C13, T*C14, T*C20, T*C22, T*C23}; C_2 (MI*) = {}; C_3 (MI*) = {T*C01, T*C04, T*C06, T*C07, T*C08, T*C09, T*C15, T*C16, T*C17, T*C18, T*C19, T*C21, T*C24, T*C25, T*C26};

Si la lista anterior identifica los textos según la categoría a la que pertenecen sus correspondientes definiciones de *curva*, la figura siguiente muestra los cardinales de cada uno de esos conjuntos. De la Figura 33 resulta que en la población de textos incluidos en bibliografías de la Argentina, menos de la cuarta parte (8 de 33) designa como *curva* a la función vectorial; en los textos recogidos de bibliografías en el exterior, en cambio, esa es la forma mayoritaria de designarla, en una proporción del 55% como puede verse. Teniendo en cuenta que MI* es una muestra de tamaño 26 de una población de tamaño 36, el porcentaje encontrado en la muestra solo se puede trasladar a la población convirtiéndolo en el argumento de una inferencia estadística.

Figura 33. La doble distribución de textos según el objeto definido como *curva* y según su pertenencia a tipos de bibliografías locales (MI) o solo extranjeras (MI*)

	MI	MI*	Σ
C1	23	11	34
C2	2	0	2
C3	8	15	23
Σ	33	26	59



Fuente: elaboración propia

Dado el modo aleatorio en que fue construida la muestra (MT*C = F_1 (T*C), Cf. u.s.3.8), la composición de la población pude suponerse no sesgada en sus atributos y entonces efectuar una estimación del valor *p* correspondiente a la población. Así resulta que la afirmación de que la población tiene una proporción entre el 48% y el 62% de textos que designan a la función vectorial como *curva* puede hacerse con un nivel de confianza del 99%, o en otro lenguaje, el intervalo (0.48, 0.62) es un intervalo de confianza de nivel 99% para la proporción *p* de la población[23].

Se advierte que la conclusión anterior no implica de manera alguna que haya una diferencia significativa, en lo que respecta al tratamiento de las curvas, entre los textos recogidos del medio local y los del exterior. Como ya se observara, la mayoría de los textos locales participan *también* de alguna bibliografía del exterior, y dentro de las universidades que ocupan los primeros lugares en los rankings que se han considerado para relevarlas. La comparación exigiría entonces añadir a T*C aquellos textos que se hallan en la intersección de ambas bibliografías, esto es TC versus T*C + TC – L, donde L designa el conjunto de los textos locales no incluidos en bibliografías del exterior, y que según se obtuviera anteriormente (Cf. u. s. 3.1) es L = {TC07, TC24, TC25, TC27}. Llamando MI** a la matriz de intensión sobre la población T*C + TC – L los resultados se aprecian en la Figura 34, cuya comparación con la figura anterior

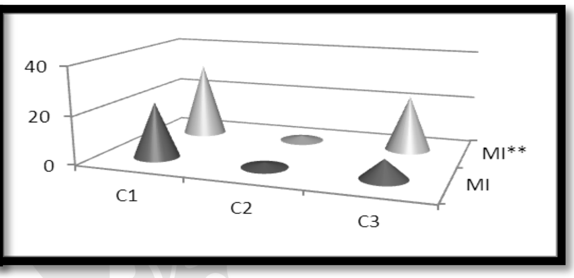
[23] Basta crear con los resultados un evento con probabilidad elevada, por ejemplo $\gamma = 0.99$. Si se hace $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{np - k\sqrt{(npq)} < n_s < np + k\sqrt{(npq)}\}$con n_s el número de casos en que el texto cumple la condición, k el percentil de nivel γ y *n* el número de veces que se repite el examen de una muestra del texto, *p* el parámetro a determinar y $q = 1-p$, se sabe que es $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \gamma$, y utilizando como estimador puntual de *p* el valor p_m resulta que $\mathcal{P}\{p_1 < p_m < p_2\} = \gamma$ con p_1 y p_2 raíces de la ecuación $n\,(p-p_m)^2 = k\,p\,q$. De allí el intervalo de confianza (p_1, p_2) de nivel γ (Papoulis 1990, 236-237).

muestra que ha desaparecido la asimetría entre las proporciones de textos MI y MI** contenidos en las clases C_k.

Si el análisis anterior obrado sobre las componentes I_2 e I_4 muestra que el objeto sobre el que recae la denominación de *curva* es diverso según los textos, observando lo que sucede con la primera columna –componente I_1– de las matrices MI y MI*, donde se especifica la naturaleza del intervalo donde está definida la función vectorial, las discrepancias se multiplican

Figura 34. La doble distribución de textos según el objeto definido como *curva* y según su pertenencia a bibliografías locales (MI) o extranjeras (MI**).

	MI	MI**	Σ
C1	23	31	54
C2	2	2	4
C3	8	23	31
Σ	33	56	89

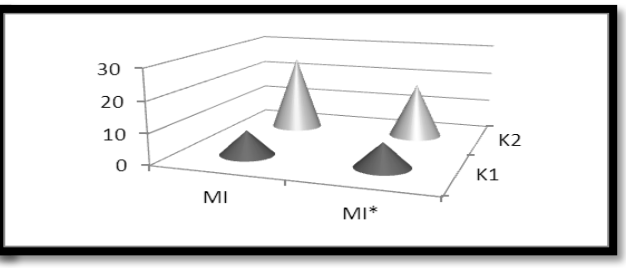


Fuente: elaboración propia

Algunos autores prefieren dar cabida a todos los tipos de intervalos, como es el caso del profesor de la Universidad de Yale, Serge Lang que dice "Los intervalos de definición de nuestras curvas pueden ser abiertos, cerrados, semiabiertos o semicerrados" (Lang 1976, 39), lo que por omisión comprende acotados y no acotados. Otros, especifican un tipo de intervalo de la lista que acepta el profesor Lang.

Figura 35. La doble distribución de textos según el tipo de intervalo (K_1 cerrado, K_2 otro) y según su pertenencia a bibliografías locales (MI) o solo extranjeras (MI*)

	MI	MI*	Σ
K1	8	8	16
K2	25	18	43
Σ	33	26	59



Fuente: elaboración propia

Una variable clasificatoria que cubriese la variedad de casos sin perder sensibilidad debiera incluir seis componentes. Sin embargo, a los efectos de la argumentación, basta la variable clasificatoria dicotómica $K = (K_1, K_2)$, definida de modo tal que un texto pertenece a la clase K_1 si exige que el intervalo de definición sea cerrado, mientras que está en K_2 en cualquier otro caso, el recorrido de K sobre las matrices de intensión produce el resultado de la Figura 35. Si se tiene en cuenta ahora la componente I_3, que especifica la estructura del espacio de llegada, también aquí los textos presentan cinco variedades como se observa en las matrices de intensiones.

Una nueva variable clasificatoria introduciría sus correspondientes distribuciones como en las figuras anteriores, que pueden verse como la representación parcial sobre una de las componentes de la Intensión del objeto conceptual, como en la Figura 36.

Figura 36. Ilustración de los análisis parciales por medio de proyecciones

Fuente: elaboración propia (la parte derecha es una adaptación de Hodgkin 2013, 198)

Un resultado fundamental de este apartado descriptivo es que un concepto específico del cálculo vectorial y la geometría diferencial, como es el caso de la *curva*, va modificándose según se recorren los textos, siendo entonces de una intertextualidad inestable. Con más precisión, el concepto intertextual de *curva* habita un espacio de cuatro dimensiones $I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$, pudiendo allí tomar al menos noventa valores (esto es 6 de I_1 por 3 de I_2 e I_4 por cinco de I_3). Por decirlo de otra manera, potencialmente hay por lo menos noventa objetos diferentes que podrían ser llamados *curva*, ni bien se admitan como lícitas las combinaciones de valores de las componentes de la intensión de su definición. Esta cota inferior puede ser todavía más elevada si se contemplan otras variedades recogidas en la matriz de intensiones y no detalladas en esta descripción, como podría ser el tipo de suavidad de la aplicación. Los 59 textos analizados ocupan algunas de esas posiciones en ese espacio, alcanzando algunos de esos valores posibles; de hecho, las figuras anteriores muestran más de una docena de ejemplares de *curva*. Los aspectos descriptivos aquí presentados tienen consecuencias sobre las demandas cognitivas de un lector que tuviese que transitar al menos dos textos que caracterizaran de diverso modo el objeto a ser aprendido, y tiene también consecuencias sobre los valores de verdad de las proposiciones que utilicen como argumentos el concepto de curva. Los impactos cognitivos se presentan en la siguiente sección (4.4), mientras que los impactos lógicos se tratan en el apartado 4.5. Conviene observar que la variedad de textos puede actuar beneficiosamente sobre el pensamiento matemático del lector, a la vez que demandarle mayores habilidades lectoras.

4.4. Impacto cognitivo de la intertextualidad

Aquí se trata de exhibir las consecuencias que las variedades tratadas en la sección anterior tienen sobre las competencias lectoras del estudiante que recorre una bibliografía en la que caben textos heterogéneos según alguna componente de la intensión. El análisis que sigue se limita al par de componentes I_2, I_4, que siendo suficiente para poner en evidencia las demandas cognitivas, prueban que serán todavía mayores si se extienden los análisis al resto de las componentes.

Según se mostró en punto anterior mediante la variable clasificatoria C, los textos utilizan el mismo vocablo para tres objetos diferentes: (C1) un conjunto de puntos, (C_2) un par ordenado compuesto por una función vectorial y su imagen, (C_3) una función vectorial. Para distinguirlos se designan aquí como *curva1*, *curva2*, *curva3* e identificarlos en un ejemplo concreto como el de la función vectorial $\boldsymbol{f}$ definida por la expresión (1).

$$\boldsymbol{f}: [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{f}(t) = (t^2, t^3) \qquad (1)$$

Un lector que tiene entre manos uno de los textos del grupo C_1, verá en la expresión (1) una curva que escribirá como la expresión (2)

$$curva1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(t^2, t^3), t \in [-1, 1]\} \qquad (2)$$

Para los lectores de los textos del grupo C_2, la misma expresión será leída como la expresión (3), el par ordenado de la función y su conjunto imagen.

$$curva2 \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{f}: [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{f}(t) = (t^2, t^3), \{(t^2, t^3), t \in [-1, 1]\}) \qquad (3)$$

Finalmente, quienes se manejan con los textos del grupo C_3, en la expresión (1) no ven sino la definición de lo que entienden por curva, esto es la expresión (4)

$$curva3 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{f}: [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \boldsymbol{f}(t) = (t^2, t^3) \qquad (4)$$

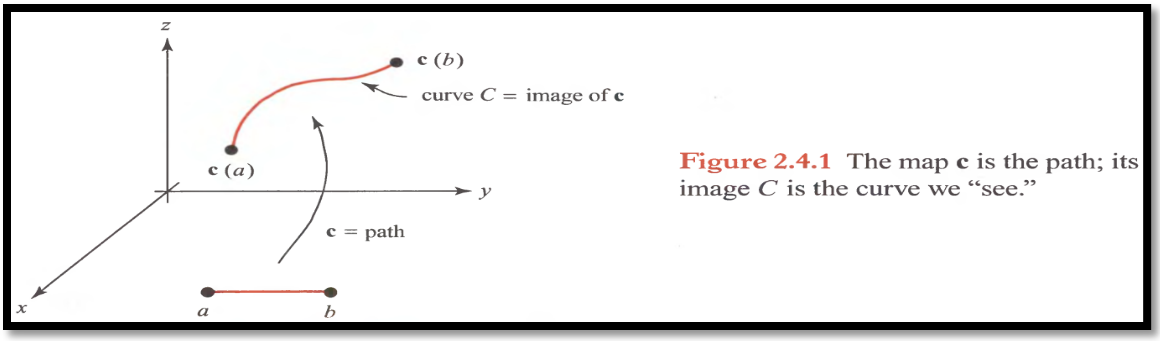
De modo independiente del ejemplo utilizado para ilustrar la diferente denotación de las tres definiciones, puede escribirse mediante la relación (5) la conexión lógica entre ellas.

$$curva2 \stackrel{\text{def}}{=} (curva3, curva1) \qquad (5)$$

Estas diferencias arrastran otras en el lenguaje de los elementos de las curvas. Si se adopta la definición de *curva3*, no tendría sentido la expresión *punto de una curva*, ya que traducida se leería como ‘punto de una función vectorial’. Dentro del esquema de los textos del grupo C_3, entonces, correspondería referirse a un *punto de la imagen de la curva*. Sin embargo, los textos confían (tácitamente) en la capacidad del lector para hacer directamente la conversión a la expresión que efectivamente encaja en la definición. Algunos autores, en cambio, consideran conveniente hacerlo explícito, como es el caso del profesor Postnikov de la Universidad de Moscú del texto TC22, que expresa que una curva es “no un conjunto de puntos, sino una función, a pesar de que el vocabulario utilizado lo contradiga constantemente. Se dice, por ejemplo, que la curva $\boldsymbol{f}$: $t \to \boldsymbol{f}(t)$ *pasa por el punto* P_0 si existe un valor t_0 (no necesariamente único) del parámetro t tal que $\boldsymbol{f}(t_0) = P_0$” (Postnikov 1988, 197): es así como el lector debiera traducir la expresión *punto de una curva*.

En el ámbito de los textos del grupo C_1, la expresión *punto de una curva* es consistente con su definición (*curva1*), dado que la curva es el conjunto imagen de la función vectorial que la parametriza. Eso es lo que puntualiza la Figura 37, tomada del original del texto TC17.

Figura 37. La diferenciación entre la curva C y la función vectorial **c**, según el texto *Vector Calculus* , texto TC17 que pertenece a la clase C_1 (Cf. u. s. 4.2)



Fuente: Marsden y Tromba (2003, 141)

La función vectorial es denominada por el texto TC17, *trayectoria*, mientras que la misma función es denominada *camino* por el texto TC01, de modo que los lectores que manejan ambos textos debieran tenerlos por sinónimos estrictos en el contexto del Cálculo. Aquí, la divergencia es introducida por las traducciones, pues los textos designan a la función con el mismo vocablo en el idioma original: *path*, como lo prueban las dos definiciones en paralelo de la Figura 38 (se ha introducido el subrayado de la palabra *path*, sin subrayar en el original).

Respecto al sentido de la locución *punto de una curva*, para el autor del texto TC09 corresponde pensar en el conjunto {(P, t)} de todos los pares equivalentes (P está fijo) tales que P = ***f*** (*t*). El punto P se llama el *portador* del par. Desde esta definición, lo que reconoce TC09 como punto es un conjunto infinito de pares dados por un punto del espacio de llegada y un correspondiente valor del parámetro, para todas las funciones equivalentes, según una definición de equivalencia que está dada en términos diferenciales, y cuya complejidad es, de hecho, bastante mayor que la de curva misma.

Figura 38. Las definiciones de *curva* en el idioma original de los textos TC01 y TC17; los subrayados no pertenecen al texto original originales

Original Texto TC1	Definition. Let J = [a, b] be a finite closed interval in R^1. A function α: —> R^m which is continuous on J is called a continuous **path** in n-space **Fuente especificada no válida.**.
Original Texto TC17	Definition. A **path** in R^n is a map **c**: [a, b] $\rightarrow$ R^n; it is a path in the plane if n = 2 and a path in space if n = 3. The collection C of points **c**(*t*) as t varies in [a, b] is called a curve, and **c**(a) and **c**(b) are its endpoints (Marsden y Tromba 2003, 142).

Fuente: elaboración propia

En muchas ocasiones puede suceder que la lectura de un segundo texto ayude a aclarar un concepto, o lo ilumine desde otra perspectiva permitiendo ver aspectos no destacados en el primero. Si, en cambio, los textos son tales que pertenecen a clases diferentes, la demanda cognitiva se ve cualitativamente más exigente, como se ha visto en el párrafo anterior: puede pensarse en un punto de una curva en el mundo perceptual, y hasta sin mayor exigencia adicional, en el mundo simbólico. Pero para pensar en un punto como el marcador de una clase de equivalencia de infinitos pares ordenados ya exige el pleno ingreso en el mundo formal de la matemática, según la clasificación de los tres mundos de los teóricos del pensamiento matemático avanzado.

En forma independiente de las diferenciales de demandas cognitivas engendradas por la intertextualidad, se encuentran sus consecuencias lógicas: es lo que trata el siguiente apartado.

4.5. Impacto lógico de la intertextualidad

Definir de un modo u otro un dado objeto es arbitrario, mientras luego se mantenga la consistencia de esa definición cuando el objeto interviene como argumento de entrada de un sistema de proposiciones. Si, como se presenta en 2.1, las definiciones formales menos que designar objetos los ponen en relación entre sí con referencia a otros definidos o aceptados como anteriores en el orden lógico, es previsible que las proposiciones tengan una extrema sensibilidad a las definiciones de los objetos sobre las que ellas afirman o niegan algo. Esto es, que las variaciones expuestas son cruciales; el autor del texto TC22 afirma que definir una curva como lo hacen todos los textos del grupo C_1 es "absolutamente incorrecto por muchas razones" (Postnikov 1988, 199). Menos que juzgar si una forma de definir una curva es más o menos "correcta" que otra, aquí se trata de apreciar las consecuencias lógicas de esa variedad intertextual.

Si un mismo término –como *curva*– designa distintos objetos, y el sistema de proposiciones se mantiene inalterado, bien podría suceder que una *misma* proposición que en dado contexto pueda juzgarse como verdadera, en otro deba juzgársela falsa. En símbolos, si con K_1 y K_2 se designan dos universos de discursos yacentes en sendos libros de texto, con la condición de que el objeto designado por C en K_1 sea diferente del que le asigna K_2, y *p* es una proposición acerca de C, entonces puede suceder que las dos siguientes afirmaciones sean verdaderas:

(a) La proposición *p* (C) es *verdadera* en K_1
(b) La proposición *p* (C) es *falsa* en K_2

Si este fuera el caso, el lector leería una afirmación que, por ejemplo, el texto de K_1 llamará legítimamente *teorema*, y sin cambiar palabra alguna, cada vez que mude al texto de K_2 deberá cambiarla a falsa ¿se da tal situación? Se prueba que sí en un caso trivial, y luego en un caso más significativo.

Los resultados de las secciones previas permiten afirmar que para toda definición de *curva* C seleccionada al azar de un texto T_1, siempre es posible encontrar un segundo texto T_2 cuya definición rechaza la del primero como tal (en símbolos, $\forall C \in T_1$ $\exists T_2$: $C \notin T_2$) . Escrito en el lenguaje de las proposiciones, esta afirmación es una prueba trivial de que la situación general se da de hecho, ya que las dos siguientes proposiciones son verdaderas (lo son por definición, claro):

(a) "C es una curva" es verdadero en T_1
(b) "C es una curva" es falso en T_2

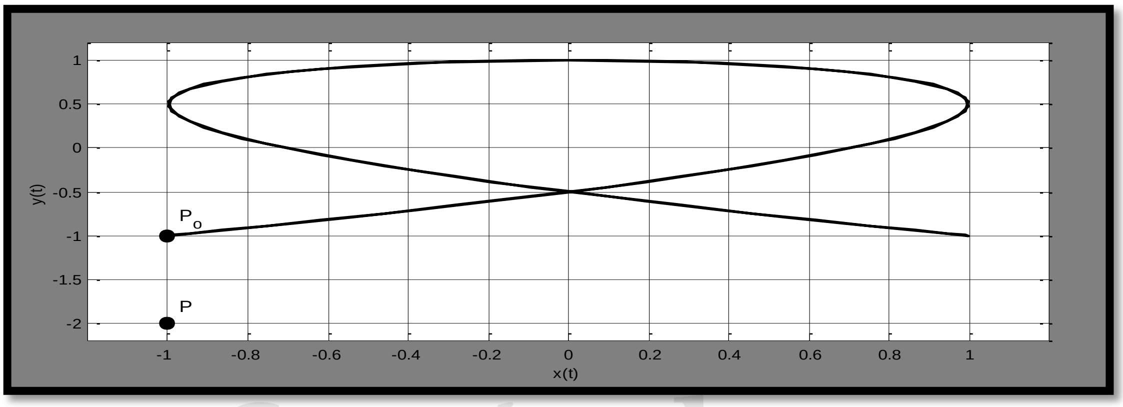
Así por ejemplo, sea elegida la definición del texto T*C19 "A parametrized curve in $\mathbb{R}^n$ is a map γ: $(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ for some α, β, with $\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$" (Pressley 2000, 9) que define una curva como la función vectorial que parte del intervalo abierto (α, β) en $\mathbb{R}^n$ sin indicación de regularidad; es posible ahora citar la definición del texto T*C16 "…rappelons qu'on appelle *courbe paramétrée,* d'origine A et d'extrémité B dans X, toute application continue $\gamma : [a, b] \to X$ d'un intervalle compact [a, b] dans X…" (Lehmann y Bkouche 1988, 399) para el que la curva es también la función vectorial sobre un espacio X, pero ahora definida sobre un intervalo compacto. Estas dos definiciones son tales que, por ejemplo, la función vectorial γ: $(0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(t) = (cos(t), sin(t), t)$ es una curva para el profesor Andrew Pressley de la Universidad de Cambridge, mientras que no es una curva para el profesor Daniel Lehmann de la Universidad de Lille. Por el contrario, la función vectorial ω: $[0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\omega(t) = (cos(t), sin(t), t)$ no es una curva para Pressley y sí lo es para Lehmann. Se puede añadir que para el profesor Serge Lang de la Universidad de Yale, tanto γ como ω son igualmente curvas. De hecho, el ejemplo prueba una proposición todavía más fuerte, esto es que para cada texto T_1 puede definirse una curva C_1 que no lo es para T_2, y que para T_2 puede definirse una curva C_2 que no lo es para T_1, y que existe un tercer texto para el que tanto C_1 como C_2 son curvas (en símbolos, la proposición se escribe como $\forall C_1 \in T_1\ \exists C_2 \in T_2\ \exists T_3$: $C_1 \notin T_2$, $C_2 \notin T_1$, $C_1 \in T_3$, $C_2 \in T_3$).

Si las proposiciones anteriores están muy próximas a ser tautológicas al estar derivadas del sistema de clasificación de los textos a través de las intensiones de las curvas, la que sigue ya no es una proposición trivial, no resulta de manera alguna de las variables introducidas y pertenece de pleno derecho al cálculo vectorial. Sea L un lector que se encuentra con la siguiente proposición *p* mientras se encuentra leyendo el texto T*C03. La proposición es un teorema; si al lector L se le preguntara por el valor de verdad respondería que es verdadero, lo que se simboliza como L(*p*) = V.

Proposición p. Sea P un punto cualquiera de R^n y sea P_0 un punto de una curva regular más próximo a P. Probar que el vector $P - P_0$ es normal a la curva en el punto P_0.

De no mediar el análisis de intertextualidad no habría mucho más que decir, una proposición se juzga verdadera o falsa y esta es verdadera (es un teorema del cálculo vectorial). Si ahora el lector L lee los textos T*C09, T*C17, T*C18, T*C19, la proposición seguirá juzgándola verdadera (aceptando la ‘licencia’ de llamar a P_0 *punto de una curva* cuando, en realidad, considerando la componente de intensión I_2, correspondería decir “sea P_0 un elemento de la imagen de una función vectorial con derivada continua nunca nula”). Sin embargo, si L no está leyendo estos textos, sino consultando cualquiera de los 55 textos restantes aquí analizados, tendrá que cambiar el valor de verdad de la proposición anterior de verdadero a falso, simbolizado como L(p) = F. El motivo yace en las mismas definiciones de curva, siendo aquí relevante la componente I_1, que especifica el tipo de intervalo en el que se define la función vectorial: mientras los primeros textos exigen que sea abierto, los restantes no (más aún, los hay que exigen sea cerrado).

Figura 39. El punto Po = (–1, –1) es el punto de la curva C más próximo al punto P (–1, –2), y sin embargo no sucede que el vector $P–P_0$ sea ortogonal a la curva en el punto P_0



Fuente: elaboración propia

Ahora nada impide que el punto P_0 más próximo se alcance en un extremo de la curva, esto es que el punto t_0 se halle en la frontera del intervalo cerrado $[a, b]$, y entonces la prueba anterior se cae. Como un ejemplo de la falsedad de la proposición llamada teorema por el texto, basta considerar la función vectorial $\boldsymbol{f}: [0, 2\pi] \rightarrow R^2$ tal que $\boldsymbol{f}(t) = (\text{sen}(3t), \cos(2t))$ y el punto P = (–1, –2): el punto más próximo de la curva C a P es el punto P_0 = (–1, –1), y claramente queda que el vector $P–P_0$ = (0, –1) no es ortogonal a la curva C en P_0, como lo ilustra la Figura 39 [24].

[24] *Prueba de la proposición p*. Si $P_0 = \boldsymbol{f}(t_0)$ con $\boldsymbol{f}$ regular, en un entorno $E \subset R$ de t_0 puede definirse h: $E \rightarrow R$ tal que $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \| P- \boldsymbol{f}(t)\|^2 = (P- \boldsymbol{f}(t), P- \boldsymbol{f}(t))$ función que es regular y alcanza un mínimo en t_0 por lo que $h'(t) = 2\,(P- \boldsymbol{f}(t), -\boldsymbol{f}'(t))$ debe ser nula en t_0 de donde resulta $(P- \boldsymbol{f}(t_0), -\boldsymbol{f}'(t_0)) = (P- P_0, \boldsymbol{f}'(t_0)) = 0$. Luego el vector $P–P_0$ es normal a la curva en el punto P_0, como se quería probar. La prueba original se cae en el segundo caso, pues ya deja de ser verdad que sea necesario que la función h deba tener derivada nula en t_0, pues ya no puede afirmarse que t_0 sea un punto interior del intervalo, lo que sí estaba garantizado si se sabía que era un abierto

.

La diferencia entre permitir o no que el intervalo sobre el que se define la curva sea cerrado, podría también presentarse en un mundo menos formal que el de la definición; si el intervalo es abierto y hay un punto más cercano, que este se encuentra en la dirección de la perpendicular está internamente asumido en el mundo cotidiano, pues cuando alguien pregunta a qué distancia está de una calle, la respuesta siempre es dada asumiendo que está preguntando por la distancia al punto más próximo de esa calle. De esta discusión resulta que el lector L no puede asignar, sin más, un valor de verdad a una dada proposición p, esto es que la función L debe aplicarse sobre p teniendo en cuenta el tipo de texto T en el que p adquiere significado. En otras palabras, la función lectora simbolizada por L no recibe *solo* como argumento la proposición p, sino *también* el texto T, para recién entonces, asignar un valor de verdad a p: es una función definida en el producto cartesiano del conjunto de las proposiciones P por el de los textos T, esto es L: $P \times T \to \{V, F\}$ tal que L(p, t) = V si la proposición p leída en el sistema del texto t es verdadera, L(p, t) = F si la proposición p leída en t es falsa. Para el caso discutido, se tiene que L(p, t) = V si t es alguno de los cinco textos T*C03, T*C09, T*C17, T*C18, T*C19, mientras que es L(p, t) = F en cualquier otro caso.

La heterogeneidad de la bibliografía no solo añade complejidad y eleva el umbral de competencia lectora necesaria para que el estudiante no se encuentre sin receptores que lo conecten con el texto. La intertextualidad que supone la convivencia de textos de clases distintas respecto a alguna intensión, transforma la función lectora L en texto-dependiente y esa dependencia alcanza al valor de verdad mismo de las proposiciones. La coherencia local de las definiciones no puede ser extendida a un nivel global, obligando a las traducciones del lector.

4.6. Las dos respuestas: discusión final

En la Introducción se planteaban dos preguntas: (1) ¿Las definiciones y el tratamiento de las curvas dado por los distintos libros de texto universitarios usados en carreras de ingeniería en la Argentina y en el mundo se refieren a un mismo objeto? (2) ¿Esta variedad puede afectar el valor de verdad de una proposición? La sección 4.3 responde de modo directo a la pregunta (1) con un *no*, pero puede añadirse por lo probado en la sección anterior que esa no unicidad es muy fuerte; no se trata solo de que haya más de un objeto, sino también de que para cualquier objeto que merezca el nombre de *curva* para un autor, pueden encontrarse otros dos autores: uno que niegue esa categoría, otro que la afirme.

Si una bibliografía universitaria es tal que para un dado concepto (el de curva es un representante cualquiera) se puede predicar su intertextualidad en la dimensión de no unicidad, las consecuencias sobre los presuntos estudiantes pueden ser diversos. Los efectos serán nulos si el lector no selecciona entre sus lecturas al menos dos textos heterogéneos respecto a ese concepto, caso en el que se encontrará seguramente todo estudiante que seleccione menos de dos textos (esto es uno o ninguno). En la medida que el estudiante se encuentre en sus lecturas con mayor diversidad de textos, se encontrará con una mayor demanda cognitiva, que bien puede exceder la zona de desarrollo próximo provocando una desconexión del texto. También es posible, por el contrario, que esa diversidad le permita mejor encuadrar el concepto al poder traducirlo al contexto de diversos autores, que tienen propósitos diferentes para definirlos de un modo u otro.

En lo que respecta a la segunda pregunta, la respuesta probada en la sección anterior es afirmativa, la función L que asigna valor de verdad a la proposición p debe tener en cuenta, para hacerlo, el significado de p en el contexto de un texto t de un conjunto de textos T, y de allí que se escribiera L como una función de dos variables, $L(p, t)$, y no solamente $L(p)$. Este impacto lógico, nuevamente implica algún plus de demanda cognitiva sobre el lector, con las mismas posibilidades que en el caso de la primera respuesta. Es claro que el estudiante que se halle capacitado para leer las proposiciones contextualizadas $L(p, t)$ ha logrado un aprendizaje cualitativamente de mayor calidad que el que solo puede concebir como conducta ante las proposiciones la función $L(p)$. La intertextualidad actuaría entonces mejorando la calidad de los aprendizajes *de aquellos que la superen*.

Una manera de que las bibliografías en las que se manifieste el fenómeno de intertextualidad puedan ser más inclusivas consiste en dotarlas de una “carta de navegación”, explicitando algunos rasgos generales de los textos con una muy breve explicación de cuáles son los propósitos que han llevado al profesor a incluirlos y qué puede esperar un lector novel al consultarlos, ya aisladamente, ya en conjunto.

Los resultados prueban la existencia e intensidad del fenómeno de intertextualidad matemática; la dificultad de la lectura se incrementa con la variedad de denotaciones que caen dentro de la referencia del mismo término al recorrer los libros de texto, impactando no sólo sobre los objetos sino también en sus relaciones lógicas.

CAPÍTULO 6

DEMANDAS Y ESTILOS

1. Introducción

Este capítulo realiza un análisis estructural sincrónico a priori de la estructura de lo textos del *álgebra lineal* en carreras de ingeniería en la Argentina. Con metodología propia del análisis de contenido, indaga las *demandas* cognitivas asociadas con los *estilos* de prosa matemática, en el marco conceptual del AMT (Tall 1991a, 2009a, 1992, 1997g, 1997f, 1988, 2011, 2012a, Tall, Yevdokimov y otros 2011, Katz y Tall, 2012b, Tall y Katz 2011, Chin 2011, Chin y Tall 2001) y se construye sobre una síntesis de la Tesis de Maestría del autor (Acero 2009). Los referentes empíricos de las variables propias del Pensamiento Matemático Avanzado son relevados y analizados con técnicas del análisis de contenido (Krippendorff 1990, Leray 2008, Neuendorf 2012, Weber 2012) sobre una muestra representativa de la población de textos de *álgebra lineal*. Los resultados generan objetos teóricos que permiten identificar las dimensiones cognitivas estimuladas por textos de tres niveles de citación a través de los diversos estilos de prosa, como así también la estructura de su distribución a través las bibliografías universitarias.

La lectura de un texto, y en especial la realización de una actividad propuesta por ese texto, supone la puesta en marcha de estrategias cognitivas, cuya naturaleza ha sido revisada y modificada profundamente desde los primeros trabajos clásicos desarrollados en la Universidad de Chicago liderados por Benjamin Bloom (Bloom, y otros 1956); las exigencias surgidas de las características del pensamiento matemático avanzado han transformado las taxonomías originales de manera de incorporar la necesaria flexibilidad reclamada por la calidad de la abstracción en este nivel. Los estilos de prosa, en cambio, introducen una clasificación según un criterio que tiene en cuenta la forma en que los distintos segmentos de prosa matemática se combinan y presentan en los libros de texto, y que presuntamente se relacionan con la energía de lectura. Ambas dimensiones son una presunción de las demandas cognitivas y de lectura originadas *desde* un texto y *a priori* de una lectura o de un aprendizaje: las demandas cognitivas y estrategias lectoras en la recepción por un dado estudiante-lector ya son una función de cada individuo y son apropiaciones del contenido de los textos que se dan *a posteriori* a las tratadas en este capítulo.

Las demandas cognitivas se refieren a los reclamos de puesta en marcha de algunas habilidades intelectuales, y no al esfuerzo exigido para su efectiva ejecución, que es naturalmente dependiente de la historia y actualidad del sujeto en su relación con el contenido. Los estilos de prosa surgen de una clasificación de las formas de organizar los componentes del discurso matemático, según cuán manifiesta quede la estructura del texto en el libro, pero no se refiere a los efectivos procesos de lectura desarrollados por los estudiantes que recorren esos textos.

Unas y otras, las demandas y los estilos, son atributos inferidos de los textos, no de las lecturas ni de los lectores Que el capítulo esté centrado en los textos no significa desconocer que los textos deben ser finalmente decodificados por un lector, ni tampoco postular que las demandas efectivamente ejercidas por los textos cuando llegan a los lectores se hallan a una cierta distancia de las demandas aquí registradas desde los textos mismos. Los estudios del AMT, por el contrario, lo reconocen explícitamente, como una importante objeción, ya que "la efectividad de la exposición de un texto depende fuertemente del conocimiento y experiencia del lector" (Steenrod, y otros 1975, 1). Una demostración detallada y clara puede resultarle instructiva e interesante a un lector, mientras que a otro que ya la conoce le puede resultar muy recargada. Hasta puede darse que un mismo lector encuentre que un trozo del texto de un autor es tediosamente clara mientras que otra juzgarla muy oscura, aun cuando el autor entienda haberle dado a ambas partes el mismo tratamiento. Sin embargo, estos reconocibles –y reconocidos– hechos no impiden que puedan introducirse principios clasificatorios que permitan una comparación entre las partes de un mismo texto y entre los textos mismos, antes de que intervenga el lector imprimiendo sus impresiones sobre ellos. Por el contrario, los estudios propios de los procesos de lectura que se verifican a la *llegada* del texto al lector podrán complementarse con los estudios de los productos a la *salida* del texto, que es donde se inscribe este capítulo.

El término *estructura*, referido específicamente a los textos de matemática avanzada, considera los estilos de prosa que pueden distinguirse según la forma en que se organizan las diferenciaciones que pueden establecerse internamente en su prosa, considerando ya su objeto, naturaleza o propósito, resultando así una clasificación de los segmentos de prosa matemática[25], que da origen al concepto de *estilo de prosa* y que ha

[25] Los segmentos son: Definiciones, Especificaciones, Teoremas, Pruebas, Ejemplos sencillos, Ejemplos de motivación, Ejemplos fronterizos, Ejemplos falsos, Contraejemplos, Ejemplos generales, Advertencias, Observaciones, Representaciones mentales, Aclaraciones de notación, Recomendaciones, Notas históricas, Discusiones históricas, Reenvíos (Bagchi y Wells 1998b, 118-127).

adquirido particular relevancia en el desarrollo y diseño de los libros de texto de matemática (Harmon 2010, 1-5). Parte de la energía que un lector invierte en la interpretación de un texto, cualquiera sea su naturaleza, es utilizada en la tarea de descubrir esa estructura, y por lo tanto es restada de la energía total disponible para el contenido sustantivo (Gopen y Smith 1990, 2-19). Desde esta perspectiva, se comprende el incremento del interés por los estudios que analizan la estructura de los textos, y en particular en el área de la matemática avanzada, mediante una caracterización del modo en que se relacionan los segmentos funcionales de su prosa (Bagchi y Wells 1998ª y 1998b, Gopen 2010).

El objetivo general del capítulo, analizar la estructura de las demandas cognitivas y los estilos de prosa de una muestra representativa de libros de texto universitarios de álgebra lineal presentes en la bibliografía de las instituciones universitarias que imparten carreras de ingeniería en la Argentina, se alcanza a través de los siguientes objetivos específicos: (a) clasificación de los *Estilos de Prosa* de la población de libros de texto que tienen al menos una referencia en la bibliografía recomendada y el análisis de sus relaciones con el nivel de referencia; (b) construcción y calibrado de una herramienta de análisis de las *Demandas Cognitivas*, con sensibilidad adecuada al caso específico del álgebra lineal; (c) caracterización de los textos en función de las *Demandas Cognitivas*, y análisis de la variación de sus valores en los distintos textos que la componen.

2. Marco teórico

Los libros de texto han recibido especial atención de la corriente del *Advanced Mathematical Thinking* desde sus mismos orígenes hacia el final del siglo XX. En esta sección se recortan de la teoría general los desarrollos y nociones que sustentan la selección y construcción de las variables que permiten la clasificación y el análisis de los datos obtenidos de la población de libros de texto.

2.1. Las presentaciones de las definiciones

En el capítulo correspondiente a la intertextualidad matemática se probó que diversos textos de cálculo podían definir con el mismo nombre diversos objetos, y sus consecuencias sobre las demandas cognitivas y la lógica misma de las proposiciones. Aquí interesa estudiar cómo pueden diferir las presentaciones de un mismo objeto (ahora sin variaciones) por diversos textos. Algunas manifestaciones de estas aserciones de la teoría surgen de la lectura en paralelo de tres de los textos seleccionados para este trabajo. El objeto definido por T2 (Hoffman y Kunze 1991) es el mismo que el objeto definido por T4 (Rojo 1995) y por T5 (Voevodin 1986) , esto es que un elemento cumple una definición también cumple la otra (resultado que en sí mismo es un teorema). La definición elegida por (T2) es mínima, ya que prescinde del escalar β de la definición de (T5) y no necesita escribir dos condiciones como se exige en (T4).

> **(T2)** Definición. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo F. Una Transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que $T(c\alpha + \beta) = c\,(T\alpha) + T\beta$ para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F. (Hoffman y Kunze 1991, 67)
> **(T4)** Sean (V, +, K, .) y (W, +, K, .) dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. La función $f: V \to W$ es una transformación lineal u homomorfismo si y sólo si (i) la imagen de la suma de dos vectores cualesquiera de V es igual a la suma de sus imágenes en W $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (ii) la imagen del producto de cualquier escalar por todo vector de V es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector $f(\alpha x) = \alpha\, f(x)$ (Rojo 1995, 66)
> **(T5)** Sean dados los espacios lineales X, Y sobre el mismo campo P. Consideremos un operador A, cuyo campo de definición constituye el espacio X y el campo de valores es cierto conjunto de Y. El operador A se llama lineal si $A(\alpha u + \beta v) = \alpha\, Au + \beta\, Av$ para cualesquiera vectores $u, v \in X$ y cualesquiera números $\alpha, \beta \in P$. (Voevodin 1986, 195)

El paralelo anterior ilustra suficientemente que la definición de un mismo objeto en un libro de texto, aunque esté definido sin ambigüedades, puede ser presentado de formas muy diversas, dejando un amplio margen a las decisiones que pueden tomar los autores.

2.2. Definición del concepto y su imagen conceptual

Tall y Vinner introducen en diversos artículos (Vinner 1991 y 1992, Vinner y Tall 1982, Vinner y Dreyfus 1989, Tall 2011) la noción de *imagen conceptual* (*concept image*) para tener en cuenta una heterogeneidad en la composición de un concepto:

> Usaremos el término ‘imagen conceptual’ para describir la íntegra estructura cognitiva que está asociada con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y procesos asociados al concepto. Se construye a través de los años mediante experiencias de todo tipo, cambiando con los nuevos estímulos que el individuo recibe durante su evolución [...] y no necesariamente se compone en todos los momentos de su desarrollo de un todo coherente [y se distingue de] la definición del concepto, que es la forma verbal utilizada para definir el concepto” (Tall 1988, 3).

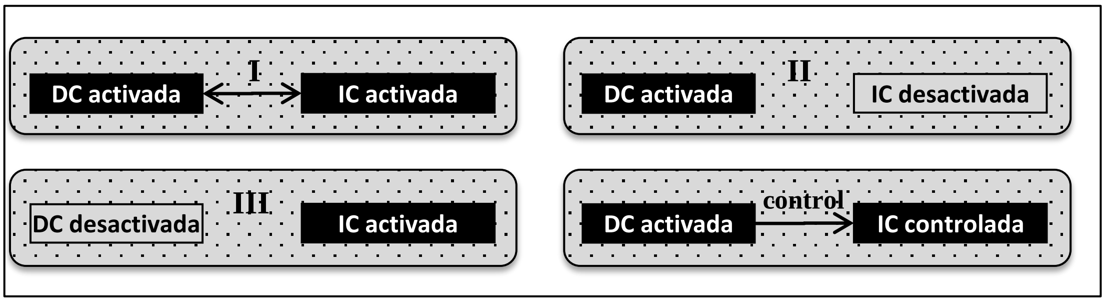
De la definición resulta que la teoría postula una distancia entre la definición formal de un concepto matemático por un lado, y la manera de pensarlo del individuo que lo aprende por el otro, siendo la comprensión del concepto tanto mejor cuanto más próximos se hallen ambos. Esto no significa, desde luego, descuidar las precisión de las definiciones de los conceptos a través de pulidas formas verbales, sino que “es preciso recordar que dichas formas verbales no son la primera cosa evocada en nuestra mente” (Vinner 1991, 69). Como corolario, la imagen conceptual depende de la historia previa del individuo que aprende y del modo en que se le presenta la información (Tall 1991b, 7-9). Adquirir un concepto significa forjarse una imagen conceptual de él. La definición del concepto dispara la generación de una imagen conceptual con la que el individuo trabaja prescindiendo de la definición formal mientras no sea necesaria. Todo sucede como si la definición actuara de andamio provisorio a la construcción de la imagen conceptual. La definición conceptual sólo es consultada cuando existe un conflicto entre la imagen conceptual y el problema.

Un ejemplo relevante de las situaciones que pueden presentarse de modo muy diverso al de la figura, se halla en el álgebra lineal con la definición de ortogonalidad, que es una abstracción de la noción corriente de perpendicularidad, con ser ya esta última también una abstracción. Se presenta para el análisis una transcripción de la definición del *mismo* concepto de ortogonalidad, recogida de los cinco textos que integran la muestra de este estudio, cuya diversidad de presentación y recursos permite ilustrar las distinciones establecidas en el seno de la teoría del AMT.

(T1) Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que $x \in V$ e $y \in V$ son vectores ortogonales si $x . y = 0$; cuando así ocurra se pondrá $x \perp y$. (Burgos 2006, 267)
(T2) Definiciones. Sean α y β vectores de un espacio producto interno V. Entonces α es ortogonal a β si $(\alpha|\beta) = 0$: como esto implica que β es ortogonal a α, a menudo solo se dirá que α y β son ortogonales. (Hoffman y Kunze 1991, 276)
(T3) Dos vectores u y v en Rn son ortogonales (entre sí) si $u . v = 0$. (Lay 2007, 379)
(T4) Sea (V, +, K, .) un espacio vectorial con producto interior. Definición. Dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto interior es nulo. El símbolo $x \perp y$ se lee: x es ortogonal a y. Entonces $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$. (Rojo 1995, 219)
(T5) La relación más importante de los vectores de un espacio euclídeo es la ortogonalidad. Por definición, los vectores x e y se denominan ortogonales si $(x, y) = 0$. (Voevodin 1986, 102)

La teoría AMT prevé tres situaciones típicas ante la lectura de estas definiciones. La situación I, que consiste en la efectiva reestructuración de la imagen conceptual, encuentra llenos el panel de la definición conceptual (DC) y el panel de la imagen conceptual (IC); En el supuesto de esta situación, el aprendiz incorpora de inmediato en el panel derecho una completa revolución, desecha las representaciones inútiles y adapta las flexibles para reestablecer relaciones con representaciones previas. Esto supone, entre otras cosas, que ya ha asumido que la ortogonalidad es dependiente de una función arbitraria (el producto interno), y que es un concepto relativo a ella y no absoluto, de manera que si le preguntaran por la ortogonalidad de los catetos en una escuadra corriente debiera poder responder que en algunas (infinitas) estructuras no son ortogonales, y en tal caso concebir la hipotenusa como más corta que los catetos, sin dificultad alguna.

Figura 1. Las relaciones entre la imagen conceptual (IC) y la definición conceptual (DC)



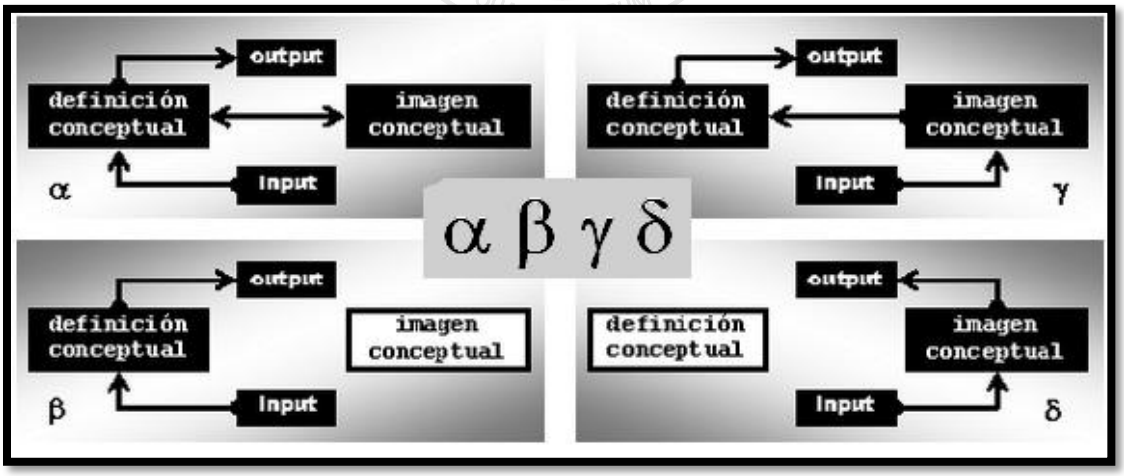
Fuente: elaboración propia

La situación del tipo II corresponde a la imagen conceptual inalterada (y por lo tanto vacía de algún significado correspondiente a la definición introducida), mientras que el panel de la definición del concepto está lleno con cualquiera de los segmentos extraídos de los libros de texto, en una situación transitoria tras la cual la definición será distorsionada o sencillamente olvidada. La ortogonalidad, en este caso, quedará asociada a la perpendicularidad original, generando dificultades y resistencias al momento de alterar el espacio vectorial o el producto interno, en cuyo caso se activa nuevamente la conexión entre ambos paneles para procurar restituir la consistencia entre las representaciones y las definiciones que las apuntalan.

Los tres tipos descriptos han de entenderse como tipos ideales; lo que con mayor probabilidad efectivamente ocurre es una combinación o coexistencia de ellos, variando con los diferentes momentos del aprendizaje, con los diferentes individuos, y seguramente con los diferentes textos propuestos. Las figuras anteriores contrastan con una figura que bien podría interpretar el modo en que muchos profesores y autores de textos entienden la formación de los conceptos en sus alumnos y lectores: “Ellos esperan que la imagen conceptual se formará por medio de la definición del concepto y será completamente controlada por él” (Vinner 1991, 71). En este supuesto, un alumno que lee la definición de T2, por ejemplo, se figura de inmediato que en la definición de ortogonalidad interviene la función $(.|.): V \times V \rightarrow K$ en el *definiens*, que la definición es simétrica y que por lo tanto es innecesario decir quién es ortogonal a quién en una pareja de vectores y que por ello puede hablarse de que ambos son ortogonales (esto es que los autores de T2 han deslizado un pequeño teorema en la definición, que el resto de los autores ha dejado sin mencionar), y que esta definición seguramente contaminará toda la geometría que tendrá que ser nuevamente pensada como la ciencia de las propiedades preservadas ante las transformaciones, e imagina cómo modifica eso sus nociones de distancia, figura, etc. Significa además, que la similitud de los símbolos escogidos para decir que dos vectores son ortogonales con sus conocimientos previos de perpendicularidad no le produce confusión (el símbolo ⊥ evoca la perpendicularidad del que la definición, precisamente, se está desprendiendo).

Si, conforme a las investigaciones, la suposición anterior se descarta, hay una manera privilegiada al alcance de los autores de libros de texto para controlar el estado de las dos celdas en los lectores: está constituida por el apartado usualmente denominado como 'ejercicios', que les presenta a los aprendices dificultades que pueden contribuir a la activación de las celdas, o al menos a provocar alguna inconsistencia entre sus contenidos que sirva como advertencia de la necesidad de revisar los motivos del desajuste. La Figura 2 muestra una tipología de las respuestas probables según el diseño de las actividades propuestas.

Figura 2. Los recorridos α, β, γ activan la definición conceptual, a diferencia del δ



Fuente: elaboración propia a partir del AMT (Vinner 1991, 71)

Las flechas indican el modo en que el sistema cognitivo funcionaría según el carácter del ejercicio. El tipo (α) correspondería a lo que idealmente se espera de una actividad, esto es que se movilice el aparato cognitivo en su conjunto, con una resonancia entre las representaciones de los conceptos afectados por la tarea y las definiciones mismas de esos conceptos, para así obtener conexiones más numerosas y de mayor calidad.

El tipo (β) es denominado como deducción formal pura, la obtención del resultado (en este caso típico, usualmente una demostración) exige la capacidad de combinar los conceptos conforme a las reglas permitidas por los razonamientos válidos, lo que podría en teoría ser llevado a cabo sin acudir a las representaciones semánticas de los símbolos con los que se operan. El tipo (γ) corresponde a una aprensión del problema desde los significados que son evocados por la dificultad planteada, para luego ser ordenados en el formato y la precisión propia de las definiciones. Se le denomina deducción mediada por pensamiento intuitivo. Lo que tienen de común los tipos (α), (β), (γ), es la consulta en el proceso de resolución del bloque que contiene la definición del concepto, y eso es justamente lo que convierte en singular el esquema (δ); aquí, la definición no es consultada durante el proceso de la resolución, y la respuesta se obtiene sin pasar por ella. Este es precisamente el comportamiento propio de la vida diaria, tal como ya se mencionara, donde el pensamiento habitual salta la definición pues no tiene necesidad alguna de revisarla para responder adecuadamente a un problema, ya que le basta con las manipulaciones que le son sugeridas por sus representaciones mentales del concepto (Tall 2011 y 1995, Edelman 1987 y1989, Edelman 1994, Fodor y otros 1980). Es este hábito el que no estimula de un modo natural a revisar una definición que además está escrita en un lenguaje altamente técnico, requiriendo un esfuerzo extra ya solamente para el simple acto de leerla (Paivio 1986 y1971).

¿Cómo lograr que el patrón de respuesta se ubique entre los tipos (α), (β), (γ), sin que se deslice al tipo (δ)? La respuesta es “sólo los problemas que escapan a la rutina, aquellos en los que la incompletitud de la imagen conceptual pudiera resultar equivocada, pueden estimular al individuo a revisar tales concepciones. Tales problemas son escasos, y los estudiantes los tienen por ‘injustos’ o ‘falsos’ [...] no hay, por lo tanto, una fuerza suficiente para cambiar el pensamiento habitual de los habitantes que son, en principio, inapropiados para contextos técnicos” (Vinner 1991, 73). Por supuesto, los problemas no rutinarios sí están presentes, en mayor o menor medida, en los libros de texto, y este apartado define un criterio demarcatorio para ellos. Un ejemplo en el área del álgebra lineal se obtiene de dos de los libros de texto analizados con sendos ejercicios que son transcriptos a continuación. El primero es del texto T2 (Hoffman y Kunze 1991), §8.4.7, p. 306, identificado con el número 83 en la matriz de demandas cognitivas, el segundo del texto T3, §6.1.15, p.382, identificado con el número 124 en la matriz de demandas cognitivas.

(T2) Sea V un espacio complejo con producto interno y T un operador lineal autoadjunto sobre V. Demostrar que (a) $\| \alpha + iT\alpha \| = \| \alpha - iT\alpha \|$ para todo α en V; (b) $\alpha + iT\alpha = \beta + iT\beta$ si, y sólo si, $\alpha = \beta$; (c) I + iT es no singular; (d) I – iT es no singular; (e) Supongamos ahora que V es de dimensión finita y demostremos que U = (I- iT) (I + i T)–1 es un operador unitario; U se llama la transformación de Cayley de T. En cierto sentido U = f(T), donde f(x) = (1 –ix) / (1 + ix). (Hoffman y Kunze 1991, 306).
(T3) Determine cuáles pares de vectores son ortogonales. a = [8 –5]T, b = $[-2\ -3]^T$. (Rojo 1995, 382).

El primero es un ejercicio múltiple donde la respuesta (β) es imprescindible en los cuatro apartados; pero además, en (e) hay una definición nominal (la de transformación de Cayley) para la que de inmediato se pide la demostración de uno de sus atributos, de modo que se obliga a un comportamiento (α); finalmente, el último párrafo del apartado (e) ofrece una aproximación intuitiva que permite al lector hacer una analogía entre el operador U entre espacios vectoriales abstractos y una función f compleja de variable real, un objeto bastante más sencillo, de modo que posibilita el recorrido (γ). Definitivamente, este ejercicio impide cualquier intento con (δ), precisamente lo opuesto de lo que sucede con el segundo ejercicio, donde la verificación de la ortogonalidad se reduce a la ejecución de una operación aritmética, y donde la ortogonalidad y la perpendicularidad clásica son indistinguibles. El caso ilustra el modo en que el diseño de la actividad influye sobre la ruta seguida para resolverla, pero esta influencia no alcanza a ser una determinación completa. Las investigaciones (Duffin y Simpson 1993, 313-328, Gray, y otros 1999, 14-15, Pinto 1998, Pinto y Tall 1996, 139-196) identifican un espectro de respuestas eficaces de los estudiantes que suelen ser una combinación de los tipos puros (β) y (γ) que denominan 'formal' y 'natural'. El estudiante (β), con una estructura 'formal', se concentra en la definición y la utiliza de modo intensivo tantas veces como resulte necesario en diversos sectores de su argumentación, las imágenes visuales juegan un rol secundario. Este proceder conduce a eficaces respuestas, y a largo plazo la imagen conceptual va siendo reconstruida, aunque no se descarta la posibilidad de que no alcance una estructura (α) sino que permanezcan compartimentos inconexos en la red formal así desarrollada. El estudiante (γ) procura recibir la información desde sus propias perspectivas, intentando darle a los nuevos conceptos un significado que pueda resultar significativo a su actual estructura cognitiva; puede llevar a cabo esta tarea con mucha eficacia, alojando las estructuras formales definidas con una variedad de imágenes conceptuales.

Tanto el tipo 'formal' como el 'natural' pueden ser estudiantes destacados en el pensamiento matemático avanzado; sin embargo las secuencias de reconstrucción cognitiva que deben enfrentar son diferentes. El primero debe atender los conflictos que le surgen continuamente ante el desajuste entres sus propias imágenes conceptuales y la solidez de las fronteras establecidas por las definiciones, en tanto que el segundo no tiene demasiadas intuiciones que lo perturben en su itinerario de incorporación de nuevos conceptos, ya que su ruta es menos una reconstrucción que una construcción. La dificultad consiste aquí en la integración de las sucesivas abstracciones que ha ido incorporando en un todo coherente y dotado de sentido, proceso que ahora sí le exige una reconstrucción. Podría decirse que en tanto el primero aborda la reconstrucción en el inicio, el segundo la pospone hasta el final; la plenitud del proceso es cumplida cuando la estructura del conocimiento procede como en el tipo ideal (α). Una consecuencia inmediata de lo anterior es que la estructura de un dado libro de texto, o una actividad específica de un libro de texto, podrá resonar más o menos según la cercanía con la estructura cognitiva del lector.

Retomando el ejemplo anterior, la actividad propuesta en T2, podrá resultar para un estudiante formal (β) de una naturaleza diferente que para un estudiante natural (γ). Al primero le resulta el enunciado muy directo, observa una lista de cinco afirmaciones que debe demostrar, identifica en el encabezado las hipótesis acerca de la naturaleza de los objetos que intervienen en las afirmaciones, distingue además que la estrategia de prueba para la primera es la propia de una identidad, en tanto que la segunda exigirá una subdivisión en condición necesaria y suficiente, la tercera y cuarta la técnica habitual de prueba de que un elemento pertenece a una clase, y advertirá que en la quinta necesita además consultar la definición de *unitario*, que el mismo autor distingue con la tipografía cursiva, y luego proceder a la prueba de que el operador definido como U satisface la definición de unitario. El mismo estudiante podría mirar extrañado lo que consideraría 'adornos' prescindibles para la tarea que debe realizar, y hasta es posible que lo perturbara el comentario final del apartado (e), ya que efectivamente todo el ejercicio puede ser realizado sin esa información adicional que los autores añaden precisamente para permitir una aproximación desde un registro más simple.

Para el estudiante 'natural' (γ) el ejercicio se ve muy diferente. La identidad que debe probar inicialmente se le presenta como la preservación de la longitud ante una sustitución del operador I + iT por el operador I – iT; la segunda proposición es comprendida como equivalente a la inyectividad del operador I + iT, de donde considera evidente la tercera afirmación e imagina que la cuarta tiene un significado similar que conecta con la identidad primera; en lo que respecta a (e) la traducirá como equivalente a probar la preservación de las normas por el operador U, lo que le parecerá 'natural' dado su semejanza con la función f propuesta por el enunciado que devuelve escalares complejos de módulo unitario para cualquier argumento real. El mismo dato que al primero le resonaba como un 'ruido', al segundo le amplifica su aprehensión intuitiva. La demanda cognitiva no es sustancialmente diferente según que se trate de una u otra visión, en esta descripción de los tipos ideales. Lo que se señala es de qué manera el formato de una actividad puede resultar más familiar a un (β) que a un (γ). En cualquier caso, sí se afirma que la demanda cognitiva de una actividad que permite una respuesta tipo (δ) es menor.

2.3. Los estilos de prosa

La definición de los tres estilos de prosa que son utilizados en este capítulo (narrativo, rotulado, mixto) es construida por los teóricos de las variedades de prosa matemática (VMT: *Varietal Mathematical of Prose*). Diversas investigaciones (Bagchi y Wells 1998a, 15-27, Gopen y Smith 1990, 2-19, Dieudonné, Halmos, y otros 1975, 1-16, Audin 2004, 193-209) en el seno de la corriente muestran la dificultad de los lectores para comprender la naturaleza de las definiciones, y la de distinguir entre una definición y una informal discusión de un concepto. También se destacan las dificultades para distinguir entre el significado de las palabras en el lenguaje cotidiano y el que a las mismas palabras se les puede eventualmente asignar en el discurso matemático. No les resulta sencillo reconocer lo que diferencia una prueba de un argumento plausible para presentar un teorema (Lamport 1993, 1-16). La estructura del discurso matemático podría resultar un obstáculo adicional al aprendizaje del contenido que es estructurado; se comprende entonces la intensa atención que la teoría ha dedicado a los estilos de prosa.

En el libro de texto, la exposición cursa a través de un discurso que combina por un lado el lenguaje natural, y por el otro el denominado 'registro matemático', que comunica los hechos y razonamientos matemáticos específicos: es el lenguaje de las definiciones, los teoremas, las pruebas y en principio podría traducirse a un lenguaje formal puramente lógico sin intervención del lenguaje natural en absoluto. Pero los textos se construyen también con un registro no matemático, donde el autor introduce comentarios acerca de la génesis de un concepto, o establece analogías o sugiere modos de pensar un concepto, enfoques, o inclusive cuando propone argumentos que parecen muy plausibles y convincentes, sin constituir una prueba formal de sus afirmaciones. Si se acepta que parte de la atención del lector se dirige a captar la estructura del texto, resulta necesario también aceptar que si tal estructura se hace explícita, quedarán más recursos disponibles para que el lector atienda el contenido sustantivo que el texto pretende comunicar.

> “a través de los años, el autor se dio cuenta que los estudiantes tenían dificultad en desentrañar el propósito de diferentes partes del texto. Por ello, el texto ha sido partido en bloques cada vez más pequeños, cada uno de ellos etiquetado de acuerdo a su naturaleza: definición, teorema, observación, ejemplo, ejercicio [...] desplazándose desde una fluida prosa matemática, un extremo que llamaremos (Narrative Style) *estilo narrativo*, hasta otro extremo, una especie de manual de ingeniería con todos los parágrafos etiquetados y numerados, que llamaremos (Labeled Style) *estilo rotulado* [...] diremos que un libro está escrito en estilo narrativo si contiene capítulos con una o más páginas con muy pocas señalizaciones de los párrafos que no se correspondan a las propias del registro matemático” (Bagchi y Wells 1998b, 128).

La clasificación de los estilos, como se lee en la cita, responde a una pregunta simple: ¿cuán marcadas son las diferenciaciones entre el registro matemático y el no matemático? De allí surge un continuo desde un extremo *narrativo*, pasando por un intermedio *mixto*, hasta el otro extremo *rotulado*.

2.4. Las demandas cognitivas

La diversidad de demandas cognitivas que en la matemática avanzada corresponden a los diversos segmentos de prosa matemática se manifiesta de modo especial en los ejercicios propuestos por los autores de los libros de texto. Uno de los instrumentos para diferenciarlas lo constituyen las taxonomías cognitivas, que en sus orígenes se construyeron orientadas a los niveles elementales del pensamiento. Muchas de las revisiones y críticas de las taxonomías originales fueron inspiradas por los teóricos del AMT, originando nuevas taxonomías más próximas a los rasgos del pensamiento matemático en el nivel superior.

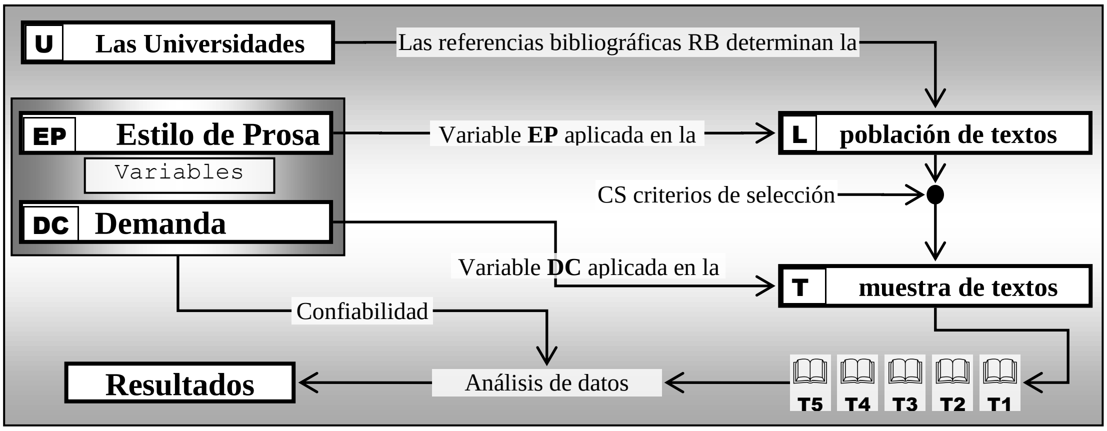
Desde los esquemas desarrollados por Bloom (Bloom, y otros 1956, Brändstrom 2005, 27-31, Williams 2012, 12-26) y su grupo de especialistas en psicología de la educación hacia 1950, se producen sucesivas revisiones (Gierl 1997, 26-32, Krathwohl 2001, 210-221, Brown 2004, 2-7) como las taxonomías SOLO y QUASAR (Structure of the Observed Learning Outcomes, Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning), las del grupo de Anderson en 2001 y el de Williams en 2002 (Biggs y Collins 2012, 1-5, Dreyfus, Schwarz y Hershkowitz 2009, 377-384, Williams 2012, 698-705, Brändstrom 2005, 30-35), las basadas en concepciones de Piaget (Dubinsky y McDonald 2000) como la teoría APOS (Action, Process, Object, and Schema) y TIMSS (Martin (Ed.) y Kelly 2008, Trends in International Mathematics and Science Study 2007). La demanda cognitiva resulta en este último una variable[26] de tres componentes o dimensiones [*Conocimiento*, *Aplicación*, *Razonamiento*], cada una de las cuales se pone de manifiesto mediante indicadores que son identificados por verbos: el *conocimiento* se presenta en las acciones de *recordar*, *identificar*, *calcular*, *obtener*; la *aplicación* se presenta en los actos de *seleccionar*, *representar*, *modelar*, *resolver problemas de rutina*; el *razonamiento* se evidencia con las acciones de *analizar*, *generalizar*, *sintetizar*, *justificar*, *resolver problemas no rutinarios*. Las demandas cognitivas en el caso del álgebra lineal sufren un corrimiento hacia las zonas más elevadas del espectro (Tall, Yevdokimov, y otros 2011), activando las definiciones y generando relaciones con sus correspondientes imágenes conceptuales (Tall y Katz 2011, Tall 2009a, Vinner y Tall 1982, Vinner 1991, Dubinsky 1991).

3. Materiales y métodos

En esta sección se describe el universo de estudio junto a las herramientas y métodos que permitieron la construcción y análisis de la muestra. Un esquema de la estrategia de la investigación contiene el conjunto U de universidades, cuyas referencias bibliográficas determinan la población L, sobre la que se aplica la variable Estilo de Prosa EP. Mediante los criterios de selección CS operando sobre la población L se extrae la muestra T sobre la que se aplica la variable Demanda Cognitiva DC. Finalmente, tras verificar un criterio de confiabilidad sobre los valores de las variables se tiene disponible el conjunto de datos procesados en los resultados. L0s criterios de confiabilidad siguen los procedimientos de rutina para calificar el grado de acuerdo, más allá del que podría producirse por azar, que se establece entre distintos observadores que juzgan las características de un mismo objeto y construir los valores de una variable nominal. La siguiente figura proporciona un esquema de esta estrategia y permite situar el recorrido de la investigación del capítulo.

[26] El lenguaje de variables, dimensiones, categorías, indicadores…, se ajusta aquí al significado dado en Korn (Korn 1971, 9-19, Korn, Lazarsfeld, y otros 1971) y también en Galtung, (Galtung 1978, 1-10), no siempre consistentes con otros textos como Samaja (Samaja 1997, 160-181), Sautu (Sautu, y otros 2005, 71-75) o Krippendorff (Krippendorff 1990, 102-108).

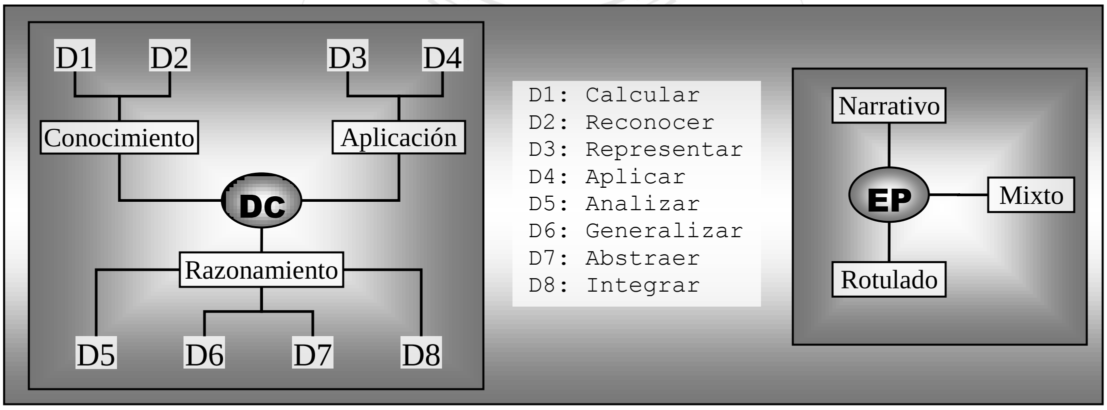
Figura 3. La estrategia de la investigación: las universidades proporcionan la población sobre la que actúan las variables para producir los datos cuyo análisis conduce a los resultados



Fuente: elaboración propia

La Figura 4 muestra un resumen de las ocho componentes de la variable *Demanda* con una breve descripción de l verbo en infinitivo que identifica la actividad dominante del domino cognitivo que se desarrolla en cada una de esas componentes y las tres componentes de la variable *Estilo*.

Figura 4. La estructura de las variables *Demanda* (DC) y *Estilos de prosa* (EP)



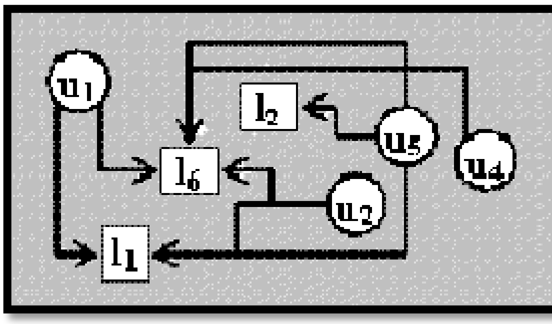
Fuente: elaboración propia

3.1. Las universidades y los textos

Las *universidades* están constituidas por todas aquellas de nuestro país que ofrecen una carrera de ingeniería, incluyendo una asignatura cuyos contenidos contengan álgebra lineal, con su bibliografía en un sitio web correspondiente a una tal asignatura; se incluyen universidades tanto públicas como privadas, nacionales y provinciales, identificándose un total de 29 instituciones. El listado completo con sus identificaciones se consigna en la Matriz VI.1 del Anexo, donde, por ejemplo, U_4 simboliza la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

El conjunto de universidades U remite a una lista de libros en su bibliografía recomendada para la asignatura correspondiente a los contenidos de álgebra lineal. La población de libros se define como el conjunto L cuyos elementos pertenecen a por lo menos una de las bibliografías recomendadas por el conjunto de las universidades. Se ha determinado un total de 50, cada uno de los cuales es identificado con el símbolo L subindicado con el número de orden correspondiente a su posición alfabética por autor, como se reproduce en la Matriz VI.2 del Anexo. La relación entre los conjuntos L es tal que para cada p-ésimo elemento de L (libro que designamos con L_p) existe al menos un q-ésimo elemento de U (universidad que designamos con U_q) que lo señala en su bibliografía. Esta relación es representada mediante un grafo cuyos nodos son los elementos de U y L (esto es universidades y libros), donde las conexiones entre sus nodos se representan mediante una línea orientada desde la universidad U_q hacia el libro L_p si y sólo si la universidad U_q incluye en su bibliografía el libro L_p. A los efectos de sistematizar los análisis, el grafo es manipulado de manera eficiente a través de su matriz de adyacencia M, con cada uno de sus 1450 elementos M_{pq} definido para todos los números naturales p, q ($1 \leq p \leq 50$, $1 \leq q \leq 29$) por la siguiente expresión. Se denominará a M como *Matriz Texto-Universidad* y está definida como $M_{pq} = 1$ si la universidad U_q incluye al texto L_p en su bibliografía, siendo 0 en todo otro caso. En la Figura 5 se observa un sector de la matriz con los primeros 6 libros de texto y las primeras 5 instituciones.. La matriz completa se encuentra identificada como VI.3 en el Anexo.

Figura 5. Grafo y Matriz Texto-Universidad (selección: 6 textos, 5 instituciones



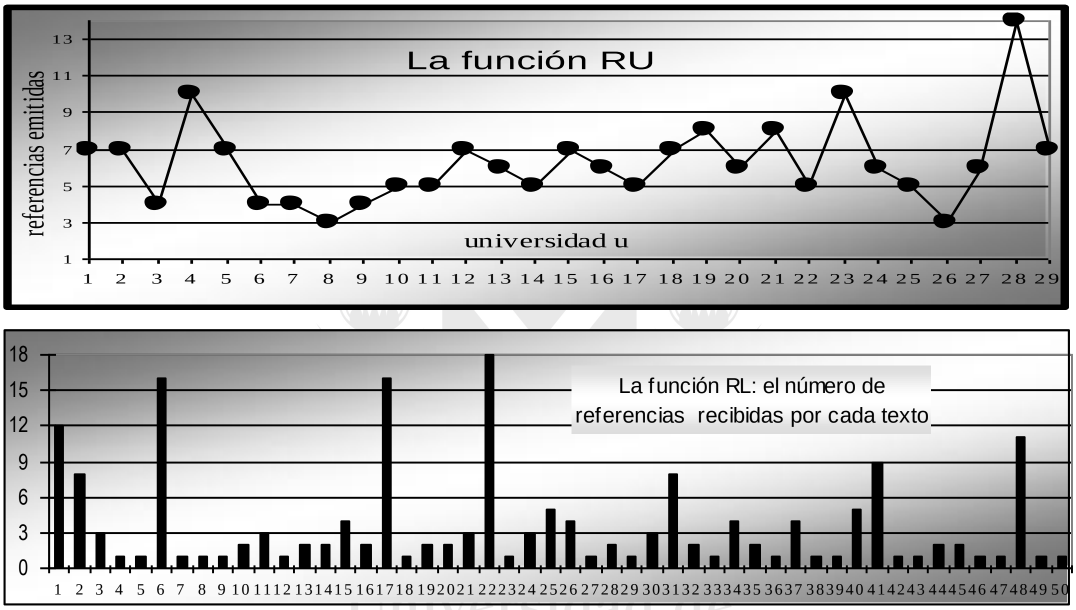
	U1	U2	U3	U4	U5
L1	1	1	0	0	1
L2	0	0	0	0	0
L3	0	0	0	0	0
L4	0	0	0	0	0
L5	0	0	0	0	0
L6	1	1	0	1	1

Fuente: elaboración propia

3.2. Las referencias

Toda vez que una universidad incluye un libro de texto en su bibliografía se contabiliza una *referencia* tanto para la universidad en su carácter de emisor de la recomendación como para el libro de texto en su carácter de receptor de la misma recomendación, lo que da lugar también a una doble distribución de las referencias definido por sendas funciones R_U sobre el conjunto U de las universidades o bien R_L sobre el conjunto L definidas por las expresiones R_U: U $\rightarrow$ N tal que $R_U (U_q) \overset{\text{def}}{=}$ ${}_{k=1}^{50} M_{kq}$, R_L: L $\rightarrow$ N tal que $R_L (L_p) \overset{\text{def}}{=}$ ${}_{k=1}^{29} M_{kq}$.

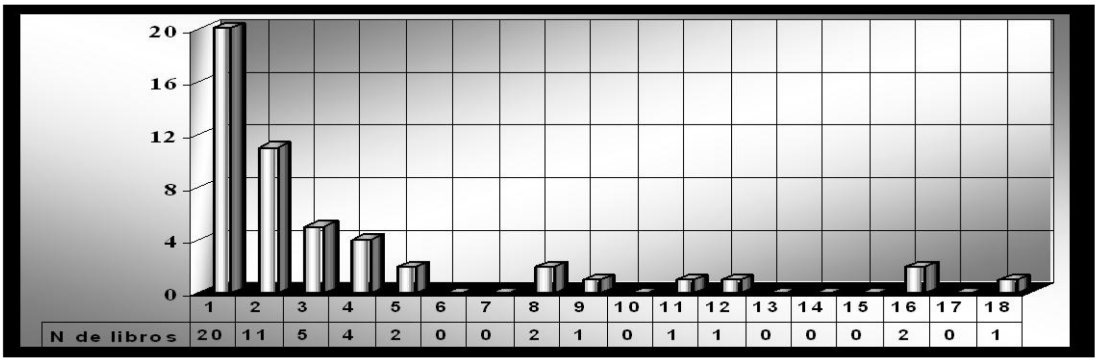
Figura 6. Gráfico de la función R_U que muestra la distribución de referencias emitidas por universidad y de la función R_L que muestra el número de referencias recibidas por texto



Fuente: elaboración propia

La distribución dada por R_U permite apreciar el amplio rango de variación en las referencias emitidas por las universidades (desde un mínimo 3 a un máximo 14). La función R_L con argumento en el conjunto L devuelve para cada libro de texto la cantidad de referencias que el conjunto de las universidades cita, resultando una distribución con una apreciable oscilación entre un mínimo de una referencia hasta un máximo de 18; ambas distribuciones de representan en la Figura 6. Considerando ahora los conjuntos de nivel k de la función R_L, esto es el subconjunto N_k de L tal que para todo elemento L_p de N_k se verifique $R_L (L_p) = k$. Por definición, resulta que N_k está compuesto por todos los libros que han sido citados k veces, como muestra la Figura 7; considerando las divisorias de clase entera más próximas a los percentiles P_{20}, P_{80} de esta distribución, resulta una clasificación de los textos según tres niveles de referencia: *Referencia Baja* (RB: una referencia), *Referencia Media* (RM: entre dos y cinco), *Referencia Alta* (RA: más de cinco).

Figura 7. En ordenadas, la cantidad de libros que reciben el número de referencias en abscisas



Fuente: elaboración propia

Resulta claro que la anterior clasificación introduce una desigual cantidad de libros en cada clase suavizando –pero no anulando– el sesgo de la distribución, resultando el agrupamiento en los tres niveles organizado en la Matriz 1. Las categorías así introducidas son mutuamente excluyentes ($RB \cap RA = RB \cap RM = RM \cap RA = \phi$) y exhaustivas ($L = RB \cup RM \cup RA$); (Korn, Lazarsfeld, y otros 1971, 17-18, Galtung 1978, 5-6, Cohen y Nagel 2000b, 62-65).

Matriz 1. Distribución de la población de libros en tres clases de referencia: RB, RM, RA

Referencia Baja	Referencia Media	Referencia Alta
Una referencia	Entre 2 y 5 referencias	Entre 6 y 18 referencias
Libros 4, 5, 7, 8, 9, 12, 18, 23, 27, 29, 33, 36, 38, 39, 42, 43, 46, 47, 49, 50	Libros 3, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 37, 44, 45	Libros 1, 2, 6, 17, 22, 25, 31, 40, 41, 48
Total = 20 📖 📖	Total = 20 📖 📖	Total = 10 📖

Fuente: elaboración propia

3.3. Estilos de prosa

La variable *estilo de prosa* definida nominalmente en el marco teórico, tiene en este capítulo las siguientes definiciones nominales. Un libro de la población L pertenece a la clase del Estilo Narrativo (EN) si y sólo si contiene al menos *dos* capítulos con al menos *tres* páginas en cada uno a través de las cuales la única diferenciación que es señalizada corresponde a los teoremas, expresiones y definiciones, conteniendo en el resto implícitas definiciones, proposiciones, ejemplos, observaciones sin señalizarlas como tales. Un libro de la población L pertenece a la clase del Estilo Rotulado (ER) si y sólo si contiene al menos *dos* capítulos tal que más de ¾ de sus páginas se segmentan y numeran en parágrafos, indicándose con un rótulo su tipo o intención: axioma, teorema, lema, corolario, demostración, definición, observación, ejemplo, advertencia, etcétera. Un libro de la población L pertenece a la clase de Estilo Mixto (EM) si y sólo si no cumple los criterios anteriores, esto es, no se hallan dos capítulos en estilo narrativo, dado que existe una señalización de parágrafos en todos, mas no se verifica en la mayoría de ellos, o es incompleta, dejando segmentos sin identificar. Del análisis aplicado según estos criterios a cada uno de los 50 libros de la población L, resulta la Matriz 2.

Matriz 2. Distribución de la población de libros en tres clases de estilos: EN, EM, ER

Estilo Narrativo	Estilo Mixto	Estilo Rotulado
Escasas distinciones señalizadas	Señalizaciones limitadas a núcleos específicos	Abundantes distinciones señalizadas
Libros, 7, 8, 9, 12, 16, 18, 22, 27, 32, 33, 37, 38, 47, 50	Libros 1, 2, 4, 10, 11, 13, 14, 19, 20, 23, 26, 30, 34, 35, 39, 44, 45, 46, 48	Libros 3, 5, 6, 15, 17, 21, 24, 25, 28, 29, 31, 36, 40, 41, 42, 43, 49
Total = 14 libros	Total = 19 libros	Total = 17 libros

Fuente: elaboración propia

3.4. Matriz de estilos y referencias

En el conjunto L se introduce ahora una clasificación según el producto cartesiano de las dos dimensiones analizadas, cada una de ellas tripartita, conformando la matriz Referencia–Escritura, con cada una de sus celdas indicando libros (📖) y cantidad (N).

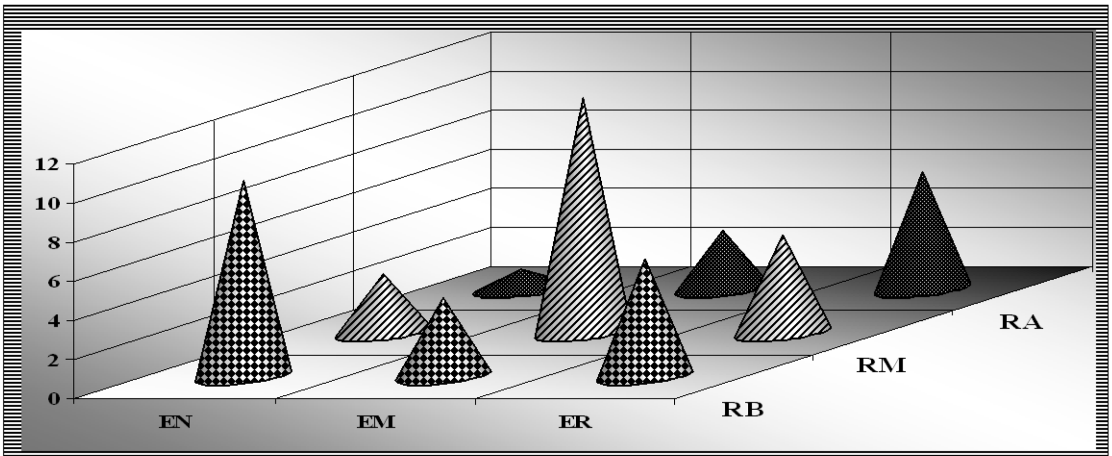
Matriz 3. Matriz Referencia–Escritura: cuántos y cuáles textos con qué referencias

	Estilo narrativo		Estilo mixto		Estilo Rotulado		Total
Referencia Baja	📖	7, 8, 9, 12, 18, 27, 33, 38, 47, 50	📖	4, 23, 39, 46	📖	5, 29, 36, 42, 43, 49	20
	N	10	N	4	N	6	
Referencia Media	📖	16, 32, 37	📖	10, 11, 13, 14, 19, 20, 26, 30, 34, 35, 44, 45	📖	3,15, 21, 24, 28	20
	N	3	N	12	N	5	
Referencia Alta	📖	22	📖	1, 2, 48	📖	6, 17, 25, 31, 40, 41	10
	N	1	N	3	N	6	
Total		14		19		17	50

Fuente: elaboración propia

La Figura 8 recoge las cantidades de cada uno de los subconjuntos de la clasificación introducida; así por ejemplo, la clase ENRB contiene los 10 libros que, escritos en estilo narrativo, tienen sólo una referencia.

Figura 8. Distribución de referencias y estilos en la población L de textos



La distribución de la población de libros según las dimensiones del tipo de escritura (EN: lenguaje narrativo, EM: lenguaje mixto, ER: Lenguaje rotulado) y del nivel de referencias obtenidas (RB: única rferencia, RM: entre 2 y 5 referencias, RA: entre 6 y 18 referencias).

Fuente: elaboración propia

3.5. Los filtros y la muestra

La muestra T se obtiene por un triple filtrado a partir de la población L, como lo sugiere la Figura 9. El filtro F_1 retiene de entre los textos solo aquellos que tratan específicamente el tema de los espacios euclídeos abriéndole el espacio de una sección o capítulo. El filtro F_2 intenta retener la heterogeneidad bidimensional en el espacio Referencia–Escritura, para captar la mayor diversidad de estructuras de los textos.

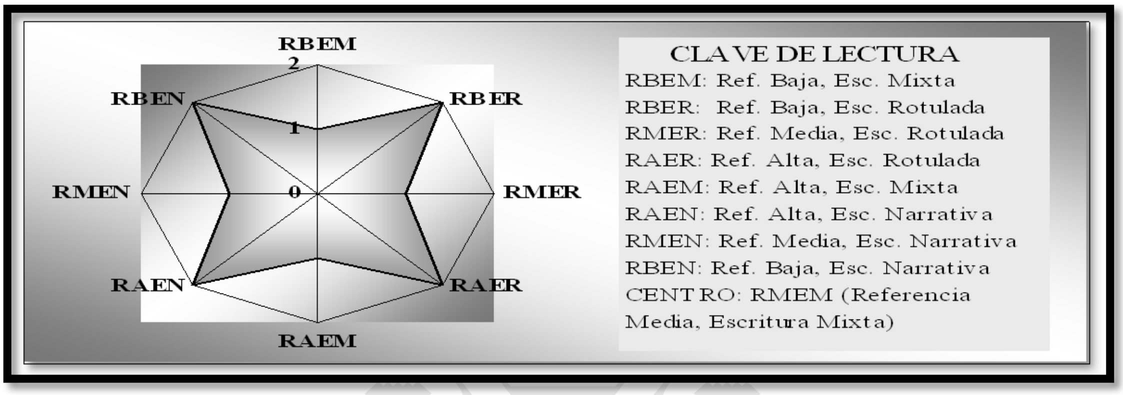
Figura 9. Esquema de los tres filtros aplicados sobre la población para extraer la muestra

Fuente: elaboración propia

Se construye F_2 efectuando una reducción del espacio de propiedades, (Barton 1971, 59-68), y que puede ser introducido mediante una distancia congruente en el espacio Referencia-Estilo determinado por la Matriz 3, conforme a la siguiente expresión: $d(RE_{ij}, RE_{pq}) \stackrel{def}{=} |i-p| + |j-q|$, con i, j, p, q = 1, 2, 3, donde RE_{pq}

identifica el elemento de la matriz que se halla en la celda ubicada en la fila p, columna q, definición que permite medir la proximidad entre los grupos (en el Anexo 6.5 pueden verse los detalles). Si con centro en la celda de referencia media y escritura mixta se grafica la posición relativa de las restantes categorías, resulta la Figura 10.

Figura 10. La distancia entre celdas en el espacio Referencia–Estilo



Fuente: elaboración propia

Con la distancia así introducida, son las celdas ubicadas en las diagonales de la Matriz 3 las que se hallan más distantes y junto a la celda central reúnen las cinco celdas de donde es extraída la muestra de cinco textos que retiene la heterogeneidad pretendida (Galtung 1978, 52). Para el filtro F_3 se toma en cuenta las nacionalidades de los autores y la procedencia de las editoriales y tras aplicarlo como último filtrado surgen las unidades de la muestra, que se despliegan a través de cuatro nacionalidades y cinco editoriales; los detalles de este último filtrado se encuentran en la tesis de maestría del autor (Acero 2009, 90-102), como así también el fundamento de mantener heterogéneas las editoriales (Lovric 2006, 12-13, Lowe y Pimm 1996, 371-409, Pepin 2007, 1-20, Pepin y Haggerty, Mathematics textbooks and their use for theachers: a window into the education world of particular countries 2003, 158-175).

Matriz 4. La muestra de textos T1, T2, T3, T4, T5

Texto	T1	T2	T3	T4	T5
Autor	BURGOS, J.	HOFFMAN K.; KUNZE, R.	LAY, D.	ROJO, A.	VOEVODIN, V.
Año	2006	1973	2006	1985	1986
Título	Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana	Álgebra lineal	Álgebra lineal y sus aplicaciones	Álgebra II	Álgebra Lineal
Edición	Tercera	Primera	Tercera	Novena	Primera
Lugar	Madrid	México	México	Buenos Aires	Moscú
Editorial	McGrawHill	Prentice Hall	Pearson Educación	El Ateneo	MIR

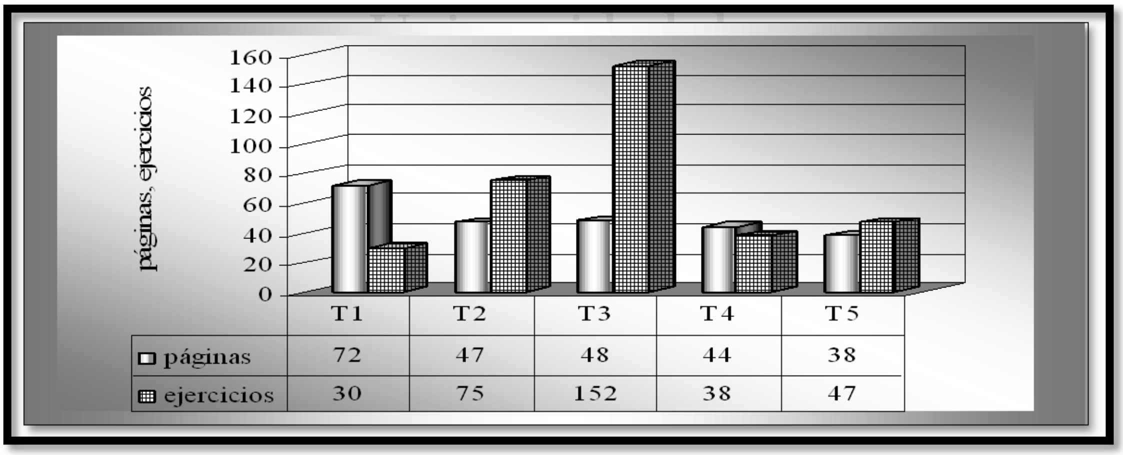
Total de Páginas	651	400	492+56	395	423
Páginas de análisis	72	47	48	44	38
Capítulo analizado	8. Espacios vectoriales euclídeos; pp.253-324.	8. Espacios con producto interno; pp. 268-314.	6. 1-3, 7-8. Ortogonalidad y mínimos cuadrados; pp. 373-402, 427-444.	7. Producto interior en espacios vectoriales; geometría vectorial. pp. 214-257.	3. Mediciones en el Espacio Lineal, pp. 80-117.
Referencias	16	18	1	2	1
Escritura	Rotulada	Narrativa	Rotulada	Mixta	Narrativa
ISBN	84-481-4900-9	0-13-022046-9	10:970-26-0906-2	950-02-5205-8	sin datos
Origen	España	EEUU	EEUU	Argentina	Rusia

Fuente: elaboración propia

3.6. Instrumento de demandas

Conforme al objetivo específico declarado, se define en el presente apartado la herramienta que permite el análisis de las demandas cognitivas en los textos de la muestra. La Figura 11 muestra el modo en que los 342 ejercicios de análisis se distribuyen en la muestra, junto a la cantidad de páginas que los incluyen, para cada texto. La identificación de cada uno de los ejercicios se detalla en 6.5 del Anexo.

Figura 11. Cantidad de páginas y ejercicios analizados para cada texto de la muestra



Fuente: elaboración propia

La taxonomía de dominios cognitivos presentada en el marco teórico es aquí calibrada para incorporar el corrimiento a la abstracción formal del álgebra lineal. Para la componente ***conocimiento***, la subcategoría *recordar* se halla de hecho en cualquiera de los ejercicios, y se la considera implícita, dado que en el ámbito del álgebra lineal, no es posible acceder a los procesos de *calcular* o *reconocer* sin incluir los de recordar.

Las subcategorías *identificar* y *obtener* están definidas de modo que toda acción de *identificación* de objetos matemáticos en diversas representaciones exige la *obtención* de la información relevante que los vincula; recíprocamente, sólo puede obtenerse la información a partir de diagramas o gráficos o enunciados si previamente se las ha reconocido e identificado como fuentes relevantes del mismo objeto; reunimos ambas en una única categoría que llamaremos *reconocer,* abarcando el reconocimiento de los significados de los objetos matemáticos posiblemente presentados en diversos registros en los enunciados y la recuperación de información relevante a partir de los mismos. De este modo, la dimensión *conocimiento* queda caracterizada por las dos subcategorías que se denominarán*, reconocer, calcular*.

Para la ***aplicación***, las definiciones de las categorías *seleccionar, modelar* y *resolver problemas de rutina*, pueden ser reducidas a una sola puesto que, de ordinario, lo que se llama un problema de rutina en el dominio del álgebra lineal exige la *selección* de alguna estrategia o método de resolución a partir de un *modelo* del problema que permitan ser manipuladas; sólo excepcionalmente una actividad se presenta de modo tal que sólo reclame una presentación de estrategias sin selección o un modelo que permita la resolución sin demandar la resolución misma. De hecho, ninguna de las 342 actividades ha permitido tal excepción. Es entonces conveniente agrupar las tres categorías en una única que se denominará *aplicación*, dimensión que queda compuesta por las dos subcategorías que llamamos *representar* y *aplicar*.

Finalmente, las componentes de la dimensión de ***razonamiento***, *justificar* está necesariamente presente en el área del álgebra lineal, de modo que se la considera implícita y sin capacidad de discriminación, ya que no puede darse sola; en cuanto a *sintetizar* y *resolver problemas no rutinarios,* pueden ser reunidos en una sola subcategoría que se llamará *integrar*, y que comporta la combinación y síntesis de procedimientos o resultados previos en un cuerpo estructurado de nuevas relaciones que permiten tratar problemas más complejos o en contextos diferentes. También resulta imprescindible incorporar la diferenciación entre *generalizar* y *abstraer* conforme a lo tratado en el marco teórico. La dimensión *razonamiento* resulta entonces compuesta por *analizar, generalizar, abstraer, integrar*.

La Matriz 5 materializa el cumplimiento del objetivo específico de elaboración del instrumento de análisis de las demandas cognitivas. La columna de la derecha obra como una grilla de lectura del tipo de actividad dominante en cada una de las actividades sobre las que se aplica.

Matriz 5. El instrumento de análisis de las demandas cognitivas

Categoría	ID	Dimensión	Definición
Conocimiento	D1	Calcular	Ejecutar un procedimiento algorítmico simple y cerrado (v.g. derivar, resolver una ecuación).
	D2	Reconocer	Reconocer los significados de los conceptos relacionados en el enunciado, identificar representaciones equivalentes, recuperar la información relevante.
Aplicación	D3	Representar	Generar diversas representaciones alternativas equivalentes de objetos matemáticos o de sus relaciones mutuas o de un conjunto de información.
	D4	Aplicar	Generar y seleccionar una estrategia adecuada a partir de un modelo de procedimientos familiar para resolver problemas rutinarios.
Razonamiento	D5	Analizar	Determinar las relaciones entre las variables pertinentes de un conjunto de información para resolver un problema, desarrollando inferencias válidas.
	D6	Generalizar	Extender el alcance de los análisis a un campo más vasto manteniendo su naturaleza.
	D7	Abstraer	Extender el alcance de los análisis a un campo más vasto con alguna modificación de su naturaleza.
	D8	Integrar	Combinar varios procedimientos o resultados para establecer nuevos resultados, resolver problemas en contextos no familiares o de complejidad superior a los tratados de modo regular, crear objetos pertinentes.

Fuente: elaboración propia

3.7. La matriz de demandas

La determinación de las demandas cognitivas se efectúa asignando a cada uno de los ejercicios un vector de ocho componentes con los valores consignados de D1, D2,... D8; para cada una de las demandas D1...D8 se establece una escala de medición de dos puntos que declara presencia o ausencia de la demanda correspondiente a la que asignamos respectivamente cero o uno; la matriz de datos consta de m = 342 filas, con n = 8 columnas correspondientes a cada demanda, en tanto que la escala de medición para cada variable es ordinal con un poder de discriminación dado por r = 2, o en modo abreviado, tiene una *característica* definida por la terna (m, n, r) = (342, 8, 2), en el lenguaje de Galtung (1978, 6-7, 79). Los ejercicios han sido numerados recorriendo el conjunto de textos, desde el 1 correspondiente al primer ejercicio del texto T1 hasta el 342 correspondiente al último ejercicio del texto T5. La escala de dos puntos adoptada puede en ocasiones conducir a la necesidad de decidir en situaciones fronterizas respecto a la presencia o ausencia de la demanda respectiva. Dado que la posibilidad de una categoría neutral está denegada, adoptamos el criterio de fusionar la categoría neutral (de presentarse) con la presencia de la demanda correspondiente. Esto significa, de hecho, asumir que una demanda dada se halla presente en un ejercicio no bien alguno de los procesos implicados en las definiciones de la Matriz 5 se halla presente, aunque fuese con una intensidad débil.

Se presenta un ejemplo de la utilización del instrumento de análisis para un ejercicio tomado aleatoriamente entre los 342, numerado con la identificación 47, que se corresponde con un ejercicio del texto T2 (Hoffman y Kunze 1991, 274) en el apartado 17 de la numeración local de los autores, cuya transcripción se presenta en la Figura 12.

Figura 12. El ejercicio numerado globalmente como 47 en este capítulo y localmente como 17 en el texto *Álgebra Lineal*

17. Sean V un espacio vectorial complejo. J una conjugación sobre V, W el conjunto de los α de V tales que $J\alpha = \alpha$ y f un producto interno sobre W. Demostrar que:

(a) Existe un producto interno único g en V tal que $g(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta)$ para todo α, β en W.

(b) $g(J\alpha, J\beta) = g(\beta, \alpha)$ para todo α, β en V.

¿Qué dice la parte (a) respecto a la relación entre los productos internos canónicos sobre R^1 y C^1 o sobre R^n y C^n?

Fuente: (Hoffman y Kunze (1991, 274)

La totalidad de los procesos cognitivos está aquí exigida a la vez que fusionada; D1 se requiere para R^1, C^1 de un modo trivial con los productos canónicos, D2 y D3 claramente por los diferentes roles del operador J de conjugación y para dotar de significado la última pregunta (que también exige el análisis D5), D4 es suficiente (y necesario) para probar (b), la abstracción D7 (implicando la generalización D6) está en la naturaleza misma del ejercicio, planteado desde el principio en un par de espacios abstractos V, W, mientras que D8 está exigida en prueba de la existencia del producto *g*, que requiere *presentarlo*, para luego probar la unicidad. De esta manera corresponde un vector fila de la matriz de demandas como el de la Figura 13.

Figura 13. La fila número 47 de la matriz de demandas cognitivas

TN	Identificación	PN	EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
T2	8.1.17	274	47	1	1	1	1	1	1	1	1

Fuente: elaboración propia

La matriz de demandas cognitivas queda definida entonces como el apilamiento de los vectores de demandas detallados. De este modo, llamando MD a la matriz de demandas, se tiene que el elemento MD_{pq} toma el valor 1 si la demanda Dq se halla presente en el ejercicio Ep, mientras que toma el valor 0 en caso contrario. La Figura 14 reproduce algunas filas de la matriz y un detalle de tres de ellas. La matriz completa resultante se presenta en el Anexo, apartado 6.8.

Figura 14. En la parte superior, un detalle de tres filas de la matriz de demandas, en la parte inferior un fragmento de la misma matriz

EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
11	1	1	1	1	1	0	0	0
12	1	1	1	1	1	0	0	0
13	0	1	0	1	1	1	1	1

EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
1	1	1	0	1	0	0	0	0	66	1	1	0	1	1	0	0	0
2	1	1	1	1	1	0	0	0	67	1	1	0	1	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	1	1	0	68	0	1	0	1	1	1	1	0
4	1	1	1	0	0	0	0	0	69	0	1	0	1	1	1	1	0
5	1	1	0	1	1	0	0	1	70	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	0	0	0	71	0	1	0	1	1	1	1	0
7	1	1	0	1	0	0	0	0	72	1	1	0	1	1	1	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0	0	73	1	1	0	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	0	0	0	74	1	1	0	1	1	1	1	0
10	0	1	0	1	1	1	1	1	75	0	1	0	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	0	0	0	76	1	1	0	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	0	0	0	77	1	1	0	1	1	0	0	0
13	0	1	0	1	1	1	1	1	78	1	1	0	1	1	1	0	0
14	1	1	0	1	1	0	0	0	79	1	1	1	1	1	1	1	1
15	0	1	0	1	1	1	1	1	80	1	1	1	1	1	1	1	1

Fuente: elaboración propia

3.8. Medidas de confiabilidad

Se entiende que "son confiables los datos que han sido obtenidos con independencia del instrumento o persona que los mide" (Krippendorff 1990, 191). Una medida de la confiabilidad de una matriz de datos se obtiene haciendo intervenir a más de un codificador, aplicando el mismo instrumento al mismo objeto y comparando los resultados mediante algún procedimiento estadístico aplicable a escalas nominales. Como es habitual, dada la imposibilidad de duplicar el esfuerzo de codificación, se utiliza para las pruebas de fiabilidad una muestra que "no necesita ser representativa de las características de la población, pero sí debe ser representativa de todas las distinciones establecidas" (Krippendorff 1990, 216). Para medir la confiabilidad en el área de las escalas nominales se han propuesto estadísticos específicos. El más simple de ellos es el coeficiente de Holsti (Brändstrom 2005, 55) que se obtiene como un porcentaje del número de asignaciones en que dos codificadores están de acuerdo. Este coeficiente ha sido objetado al no descontar los efectos de las coincidencias que podrían resultar del azar, sobrestimando la confiabilidad del instrumento. En la familia de estadísticos que descuentan la probabilidad del acuerdo aleatorio, el valor 0 indica que el acuerdo no es mejor que si los observadores hubieran asignado las categorías al azar. Coeficientes de este tipo para dos observadores son el κ-Cohen (J. Cohen 1960, 37-46)d, el π-Scott (Scott 1955, 321-325) y para más de dos observadores se tiene el coeficiente κ-Fleiss (Fleiss 1971, 378-382) y el coeficiente κ_{free} (Randolph 2005, 1-20). Se adopta el coeficiente más conservador para varios observadores: el coeficiente κ de Fleiss, a cuyo campo de aplicación pertenece este estudio. Los valores del coeficiente de confiabilidad sobre una muestra del 10% de la población son interpretados (Sim y Wright 2005, 262, Landis y Koch 1977, 159-174) según una escala de confiabilidad que denomina *pobre* ($0 \leq \kappa \leq 0.2$), *escasa* ($0.2 < \kappa \leq 0.4$), *adecuada* ($0.4 < \kappa \leq 0.6$), *muy buena* ($0.6 < \kappa \leq 0.8$), *excelente* ($0.8 < \kappa \leq 1.0$). La confiabilidad de los estilos de prosa de la población es analizada mediante la matriz de confiabilidad de una muestra de diez textos (es el 20 % de la población) que incluye los cinco textos analizados en este estudio y los restantes cinco son los que han recibido un mayor número de referencias de las universidades.

Figura 15. Matriz de confiabilidad de los estilos de prosa matemática: acuerdo excelente

Confiabilidad kappa = 0.84526

Libro	O0	O1	O2	O3	N	M	R
L1	m	m	m	m	0	4	0
L2	m	n	m	m	1	3	0
L6	r	r	r	r	0	0	4
L17	r	r	r	r	0	0	4
L22	n	n	n	n	4	0	0
L29	r	r	r	r	0	0	4
L41	r	r	r	r	0	0	4
L44	m	m	r	m	0	3	1
L48	m	m	m	m	0	4	0
L50	n	n	n	n	4	0	0

El cálculo:

$$P_i = \frac{1}{n^2 - n}\sum_{j=1}^{k}(n_{ij}^2 - n_{ij}) \qquad P_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i$$

$$p_j = \frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{N} n_{ij} \qquad P_e = \sum_{j=1}^{k} p_j^2$$

$$\kappa = \frac{Pm - Pe}{1 - Pe}$$

Fuente: elaboración propia

Los datos necesarios para el cálculo de la confiabilidad son: el número de categorías del Estilo (k = 3: Narrativo, Mixto, Rotulado), la cantidad de observadores calificados (n = 4: el autor O0 y los profesores O1, O2, O3, que asignan los libros a las categorías definidas), el número de objetos (N = 10 libros de texto). Llamando n_{ij} a la cantidad de observadores que adjudica al libro L_i, el estilo E_j, resulta la matriz de confiabilidad del Estilo de Prosa, con el correspondiente cálculo del coeficiente κ-Fleiss tal como se ilustra en la Figura 15[27].

Figura 16. La matriz de confiabilidad de la componente de demanda D_1, con un valor del coeficiente κ Fleiss 0.79 muy buena (Sim y Wright 2005, 262, Landis y Koch 1977, 159-174)

Confiabilidad kappa = 0.79

TN	Identif.	PN	EN	O0	O1	O2	O3	0	1
T1	§III.28	317	5	1	1	1	1	0	4
T1	§III.46	319	23	1	1	1	1	0	4
T2	§8.1.17	274	47	1	1	0	1	1	3
T2	§8.4.11	307	87	0	0	0	0	4	0
T2	§8.5.2	313	93	1	1	1	1	0	4
T2	§8.5.6	314	97	0	0	0	0	4	0
T2	§8.5.8	314	99	0	0	0	0	4	0
T3	§6.1.25	383	134	1	1	1	0	1	3
T3	§6.1.26	383	135	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.3	392	149	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.7	392	153	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.11	392	157	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.12	392	158	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.17	392	163	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.19	392	165	1	0	1	1	1	3
T3	§6.2.23	392	169	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.29	393	175	0	0	0	0	4	0
T3	§6.2.31	393	177	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.36	393	182	1	1	1	1	0	4
T3	§6.3.7	400	190	1	1	1	1	0	4
T3	§6.3.10	400	193	1	1	1	1	0	4
T3	§6.7.9	435	220	1	1	1	0	1	3
T3	§6.7.17	436	228	1	1	1	1	0	4
T3	§6.7.25	436	236	1	1	1	1	0	4
T3	§6.8.2	443	243	1	1	1	1	0	4
T3	§6.8.10	443	251	1	1	1	1	0	4
T3	§6.8.16	443	257	1	1	1	0	1	3
T4	§7.29	257	262	1	1	1	1	0	4
T4	§7.37	258	270	0	0	0	0	4	0
T4	§7.56	261	289	1	1	1	1	0	4
T5	§23.1	85	296	0	0	0	0	4	0
T5	§25.1	95	304	0	1	0	0	3	1
T5	§26.2	98	310	1	1	1	1	0	4
T5	§28.6	106	322	0	0	0	0	4	0
T5	§31.3	114	335	0	0	0	0	4	0

Referencias

TN:	Identificación del texto
Id:	Identificación del ejercicio
PN:	Número de página
EN:	Código de ejercicio
O0:	Valor asignado observador 0
O1:	Valor asignado observador 1
O2:	Valor asignado observador 2
O3:	Valor asignado observador 3
0	Cantidad coincidente en 0
1	Cantidad coincidente en 1

El coeficiente kappa:

$$\kappa = \frac{Pm - Pe}{1 - Pe}$$

El cálculo:

$$P_i = \frac{1}{n^2 - n} \sum_{j=1}^{k} (n_{ij}^2 - n_{ij})$$

$$P_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_i$$

$$p_j = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{N} n_{ij}$$

$$P_e = \sum_{j=1}^{k} p_j^2$$

Confiabilidad demanda D1

Fuente: elaboración propia

Por los mismos procedimientos se obtienen las matrices de confiablidad de las demandas cognitivas, de las que se ha decidido la construcción por cada componente D_k para no enmascarar algún resultado pobre en una dimensión con otro excelente en

[27] El autor agradece profundamente a Marcela Martins, Claudia López y Jorge Comas, profesores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, por su ayuda en este trabajo.

alguna otra, de donde resultan ocho matrices de confiabilidad (una para cada D_k), de las que se reproduce una en la Figura 16.

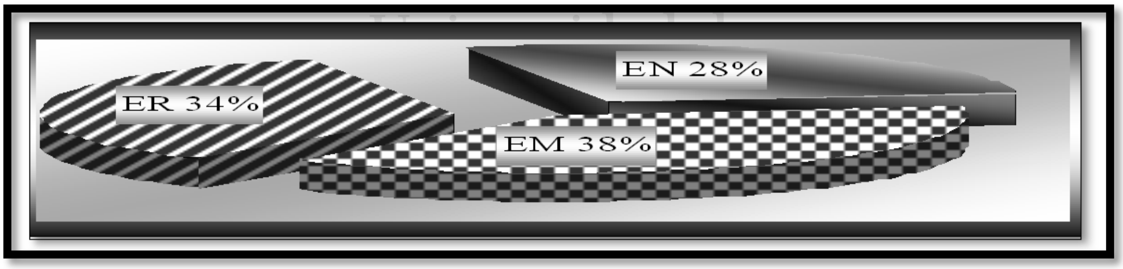
4. Resultados y discusión

En este apartado se presentan y analizan los resultados obtenidos, que materializan el cumplimiento de los objetivos planteados en la sección I de este capítulo. Los resultados comprenden tres secciones. La primera recoge los resultados de la estructura de la población relativa al Estilo de Prosa. La segunda presenta las características del Instrumento de Análisis de las demandas cognitivas. La tercera caracteriza la estructura de la muestra relativa a la Demanda Cognitiva.

4.1. Resultados acerca de los estilos

El Estilo de Prosa se distribuye con cierta uniformidad en la población completa L de textos, siendo ligeramente mayoritario el estilo mixto (EM = 38%), el menos representado el estilo narrativo (EN = 28%), ubicándose el estilo rotulado (ER = 34%) en una posición intermedia (Figura 17).

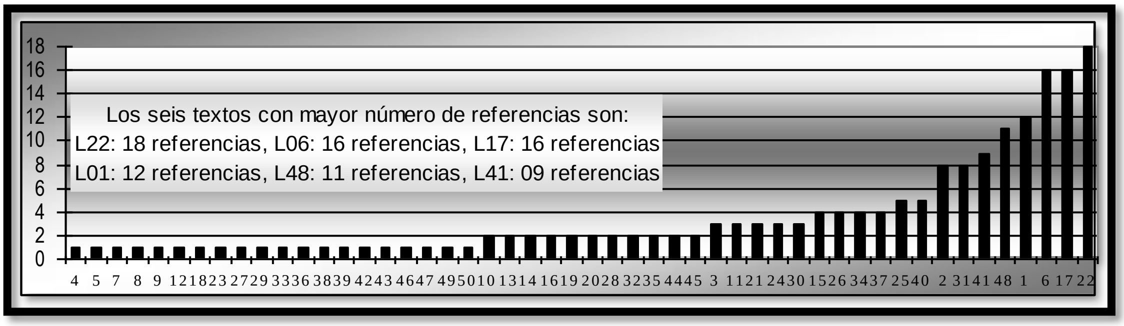
Figura 17. La distribución de los estilos de prosa sobre la población L



Fuente: elaboración propia

El número de referencias (Figura 18) que los libros reciben de las universidades es de una variación muy amplia (rango entre 1 y 18). El más citado es el texto clásico identificado como L22 (Hoffman y Kunze).

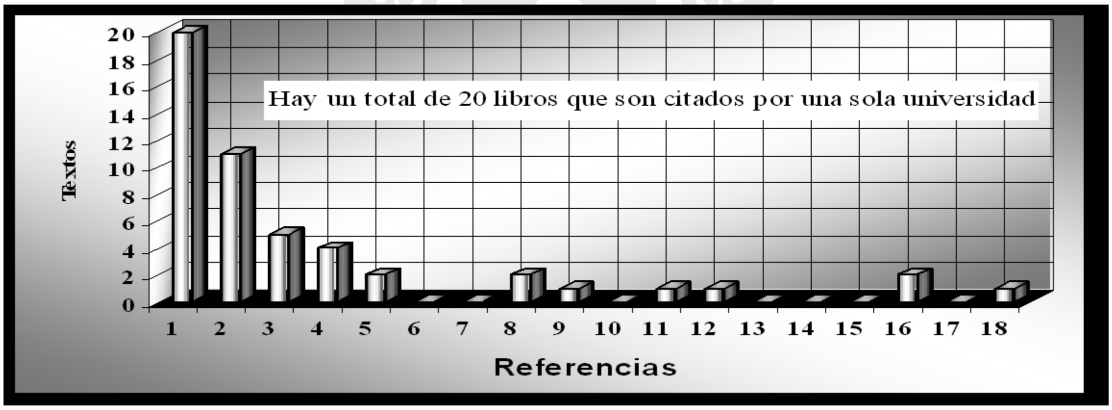
Figura 18. El número de referencias (ordenadas) que recibe el texto L_k (abscisas)



Fuente: elaboración propia

La Figura 19 muestra la distribución de textos sobre las cuantías de referencias, siendo la relación inversa de la presentada en el la figura anterior. Se observa que el 62% (31 libros) de los textos de la población son citados en menos de dos ocasiones, mientras que sólo el 6% (tres libros) supera las quince referencias.

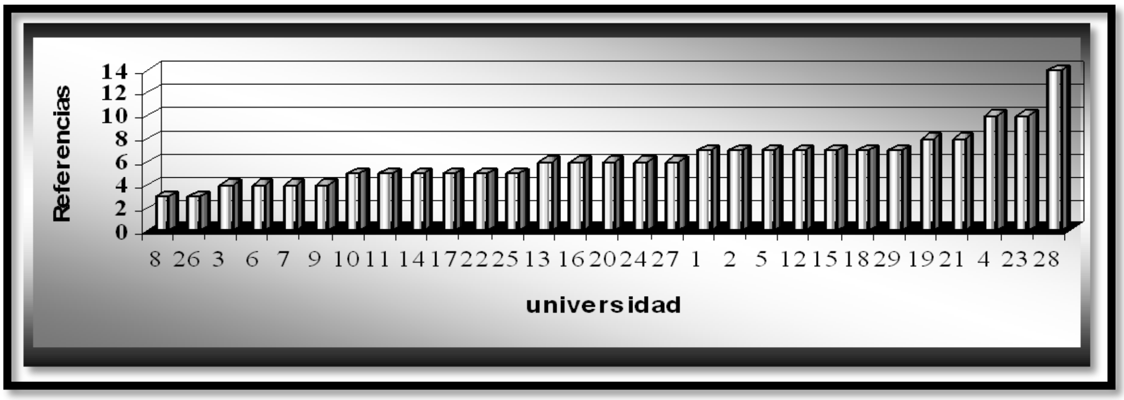
Figura 19. El número textos (ordenadas) que es citado una cantidad dada (abscisas) de veces



Fuente: elaboración propia

La composición de la bibliografía que cada una de las universidades incluye en el currículum no es objeto de análisis; sin embargo se consigna en la figura siguiente la distribución del número de textos a los que cada universidad remite a sus estudiantes para la consulta. Se observa una dispersión de rango 11 en el volumen de la bibliografía alrededor de la media de 6.3 libros por universidad (desde un mínimo de 3 de la Universidad Nacional de Cuyo hasta un máximo 14 de la Universidad Tecnológica Nacional (Figura 20).

Figura 20. La cantidad de referencias emitidas (ordenadas) por cada una de las universidades U_k (abscisas): por ejemplo, se observa que las universidades U_{19} y U_{21} citan cada una 8 libros

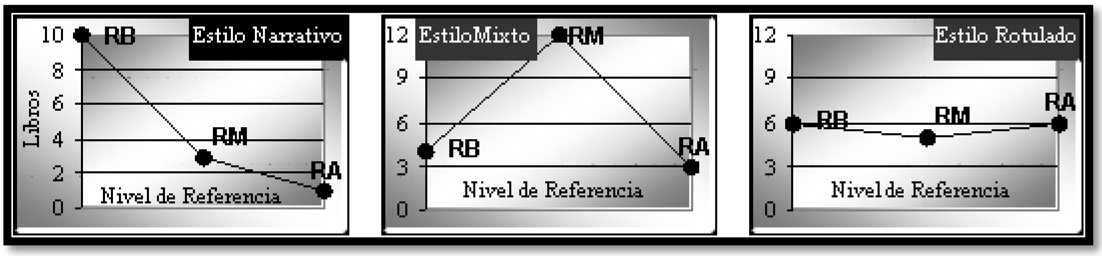


Fuente: elaboración propia

Del análisis de la matriz Referencia-Estilo se obtienen dos tipos de resultados básicos: la distribución de los estilos sobre las referencias (Figura 21), y la distribución de las referencias sobre los estilos (Figura 22), que no es sino la representación de la relación inversa a la primera.

Respecto de la distribución de los estilos sobre las referencias, puede observarse que la cuota del estilo narrativo disminuye con el aumento del nivel de referencia: dicho de otro modo, los libros menos citados son preferentemente narrativos (primer panel de la Figura 21). El 71% de los libros escritos en este estilo tiene solamente una referencia, mientras que solamente uno tiene una referencia alta (y alcanza el máximo de referencias, se trata del ya citado texto L22 (Hoffman y Kunze). Los libros escritos en estilo mixto se encuentran mayoritariamente en los niveles de referencia medio, disminuyendo hacia los extremos. El estilo rotulado no varía sensiblemente con el nivel de referencia, como se observa en el tercer panel de la Figura 21.

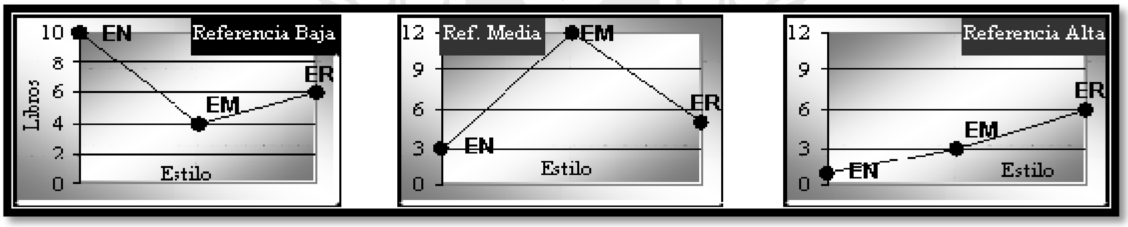
Figura 21. Las distribuciones de los estilos según los niveles de referencia: el panel de la izquierda indica que el estilo narrativo es minoritario en popularidad



Fuente: elaboración propia

En cuanto a la distribución de las referencias a través de los estilos, se observa que entre los libros con solamente una referencia, los textos de estilo mixto son minoritarios, los narrativos mayoritarios, ubicándose los de estilo rotulado en un valor intermedio. Los de referencia media son mayoritariamente escritos en estilo mixto, escasamente se tienen narrativos y en valores intermedios los de escritura rotulada. En cuanto a los de referencia alta, la menor proporción es de narrativos, la mayor de rotulados y un valor intermedio para los de estilo mixto. (Figura 22). Estos resultados pueden ser también apreciados en simultáneo utilizando la representación bidireccional, mediante la lectura por filas o columnas de la matriz graficada. La diagonal dominante se traduce por una marcada afinidad de pares asociados de estilo-referencia: (Narrativo-Baja), (Mixto-Media), (Rotulado, Alta), que expresa con mayor nitidez las tendencias combinadas de la variación unidireccional ilustrada en los anteriores gráficos.

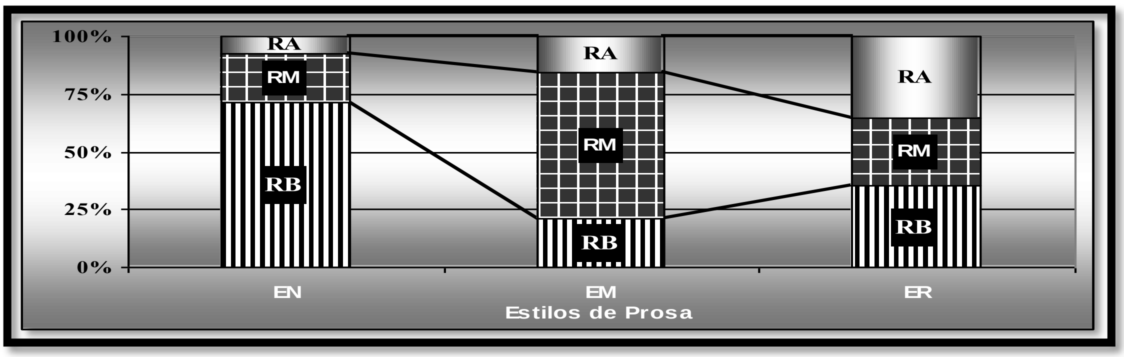
Figura 22. Distribución de los niveles de referencia sobre los estilos

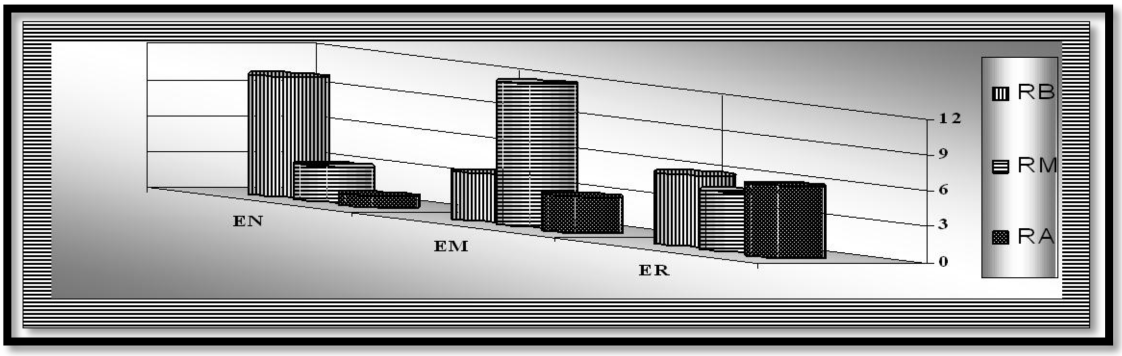


Fuente: elaboración propia

Finalmente, la Figura 23 condensa la información de las anteriores utilizando el sistema de representación de doble lectura que permite una apreciación de las transiciones a través de las líneas que unen las categorías normalizadas de modo porcentual (panel superior), o en ternas de categorías con los valores absolutos organizados en agrupamientos a través de los tres estilos (panel inferior).

Figura 23. Composición porcentual (panel superior) y en valores absolutos (panel inferior) de las referencias sobre los estilos





Fuente: elaboración propia

4.2. Resultados acerca del instrumento

La determinación de las demandas cognitivas en la muestra resulta de la aplicación del instrumento de análisis obtenido con los principios del marco teórico (sección 2) y definido en el apartado de materiales y métodos (sección 3). En este punto apartado se presentan los resultados referidos al *poder discriminante* y la *confiabilidad* de la herramienta para su aplicación al álgebra lineal, según lo revelan los productos obtenidos del pasaje a través de la grilla de lectura del bloque de 342 ejercicios.

El *poder discriminante* derivado de la definición del instrumento se obtiene de considerar que la aplicación de la grilla a una dada actividad resulta en un vector fila de ocho componentes, cada una de las cuales puede tomar dos valores, como indica la Matriz 6.

Matriz 6. El vector instrumental de la grilla de lectura: los valores que adopta cada dimensión son 0 o 1 (para cada una de las 342 actividades analizadas)

Demanda	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
valor	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1

Fuente: elaboración propia

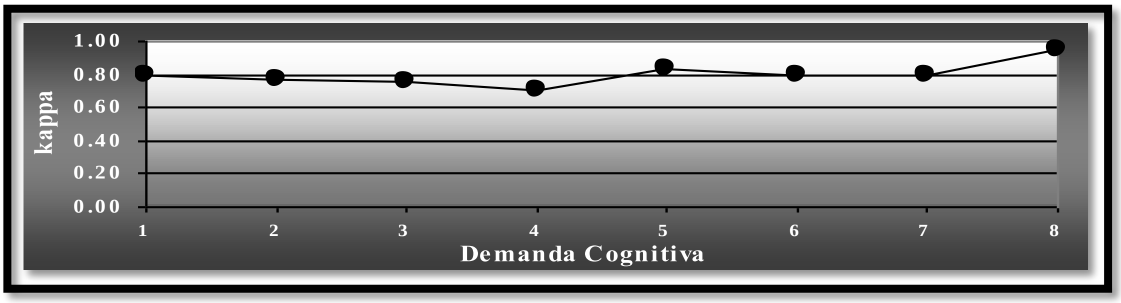
Una medida del poder discriminante es el cardinal del conjunto de vectores diferentes que puede resultar de su aplicación: 256 (el resultado de 2^8). Sin embargo, este poder potencial podría no ser efectivo, si el instrumento careciera de la sensibilidad suficiente para distinguir entre las demandas de las diferentes actividades. Para esto se determina, a partir de la matriz de demandas, las cantidades de los ejercicios que son imputados a diferentes cantidades de demandas cognitivas. El resultado que se muestra en la Figura 24 permite apreciar que: (a) ninguna categoría está vacía, (b) ninguna categoría está saturada, dos extremos que indicarían la inutilidad de una dimensión, de modo que la sensibilidad potencial resulta también operativa: las 342 actividades saturan la matriz de demandas y permite a la vez las correspondientes clasificaciones en los diversos niveles como se prueba en la siguiente sección.

Figura 24. La cantidad de ejercicios (ordenadas) que contiene un número de componentes de demanda (en abscisa): la distribución indica discriminación por componentes activas

Fuente: elaboración propia

En lo que respecta a la *confiabilidad*, medida con el muy exigente coeficiente κ de Fleiss se tiene como resultado previo el ya anotado en la sección 3.8, que arroja una confiabilidad calificada como *excelente* según la prueba estándar con tres observadores. En cuanto a la confiabilidad de las demandas cognitivas, se distribuye a través de cada una de las componentes según lo indica la Figura 25. Siendo el valor mínimo el correspondiente a la demanda D4 ($\kappa_{D4} = 0.71$), se concluye que la confiabilidad del instrumento es muy buena según la escala[28] para el coeficiente kappa adoptado.

Figura 25. El coeficiente de confiabilidad κ de Fleiss (ordenadas) calificando la confiabilidad del instrumento para calificar cada componente de la demanda cognitiva (abscisas)



Fuente: elaboración propia

En conclusión, el instrumento revela una confiabilidad excelente en la dimensión de los estilos, y una muy buena en la de las demandas cognitivas.

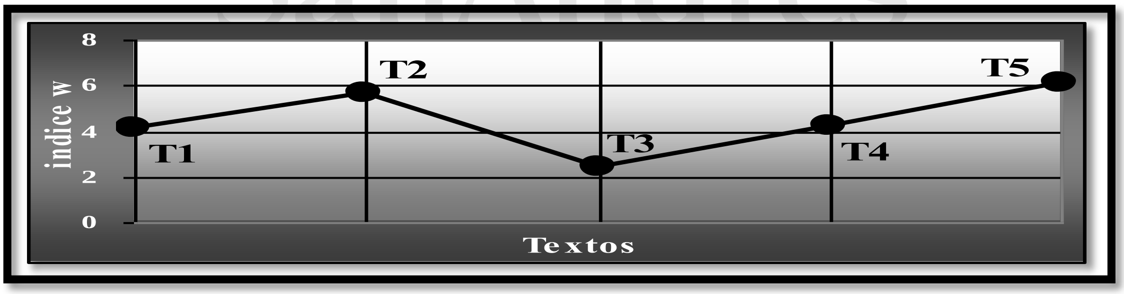
[28] (Sim y Wright 2005, 262, Landis y Koch 1977, 159-174) con la escala de confiabilidad que denomina *pobre* ($0 \leq \kappa \leq 0.2$), *escasa* ($0.2 < \kappa \leq 0.4$), *adecuada* ($0.4 < \kappa \leq 0.6$), *muy buena* ($0.6 < \kappa \leq 0.8$), *excelente* ($0.8 < \kappa \leq 1.0$).

4.3. Resultados acerca de las demandas

Los resultados de la variable *Demanda Cognitiva* son registrados en la matriz de demandas cognitivas (apartado 6. 8 del Anexo) que contiene 2732 celdas obtenidas del análisis de 342 ejercicios a través de las ocho componentes de la Demanda[29]. La distribución de los ejercicios y la cantidad de páginas en los textos se detalla en la Figura 11 (Cf. u. s. 3.6), donde se observa que T3 contribuye con 152 ejercicios (a razón de 3.16 ejercicios por página analizada) mientras que T1 lo hace con 30 ejercicios (0.43 ejercicios por página).

A los efectos de normalizar una unidad de medida se define el cociente del número de demandas por unidad de ejercicios de cada texto como un índice ω que permite la primaria comparación global entre los textos; definido entonces el índice ω_k del texto T_k como el cociente de las demandas sumadas por el texto T_k y la cantidad de ejercicios analizados de ese mismo texto, con el índice k tomando todos los valores naturales entre 1 y 5, puede graficarse ω versus k resultando así la Figura 26, donde se observan los textos T2 (Hoffman y Kunze) y T5 (Voevodin) ubicados con las más altas demandas (índices $\omega_2 = 5.6$, $\omega_5 = 6.1$), mientras que el texto identificado como T3 (Lay) tiene el valor mínimo ($\omega_3 = 2.4$), con valores intermedios para los textos T1 (Burgos) y T4 (Rojo).

Figura 26. El índice de demandas $\omega_k \stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma D_q/\Sigma E_q)_k$ que mide la cantidad media de demandas por unidad de ejercicios para cada texto T_k con k = 1, 2, 3, 4, 5



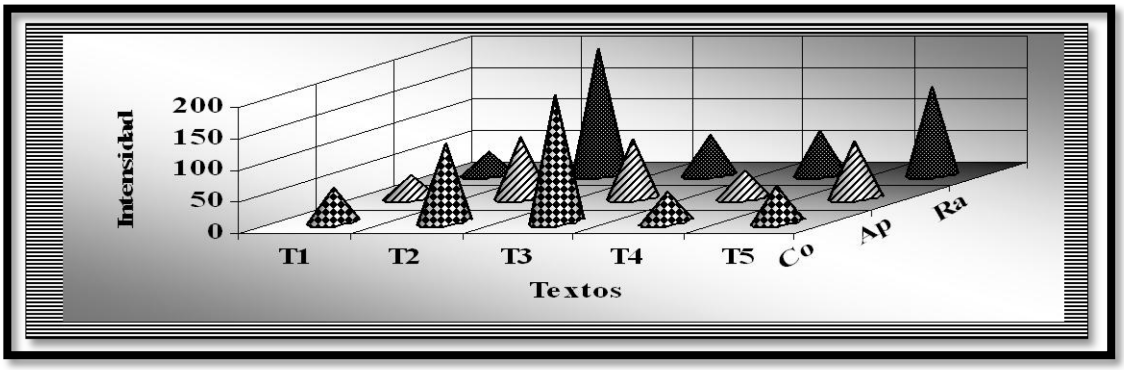
Fuente: elaboración propia

Transformaciones algebraicas sobre la matriz de demandas permiten obtener los distintos niveles de desagregación de interés según los dominios cognitivos de *conocimiento* (Co), *aplicación* (Ap) y *razonamiento* (Ra) y organizarlos en la Figura 27, cuya lectura manteniendo un texto fijo indica que las actividades de T3 (Lay) y T1

[29] La manipulación algebraica de la matriz se ha llevado a cabo con la aplicación matlab®.

(Burgos) están mayoritariamente orientadas al dominio del Conocimiento, a la inversa que T2 (Hoffman y Kunze), T4 (Rojo) y T5 (Voevodin) que cubren con mayor intensidad el dominio del Razonamiento.

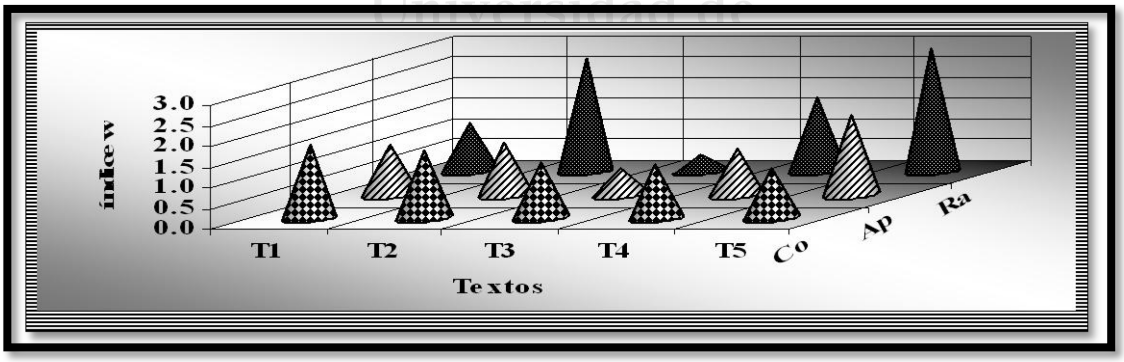
Figura 27. La distribución de demandas desagregada por textos y dominios, en valores absolutos: en T1 y T3 predomina la dimensión *conocimiento*, en el resto, *razonamiento*



Fuente: elaboración propia

La lectura a lo largo de los dominios en la figura anterior se ve distorsionada por la desigual contribución de cada texto; una lectura significativa en esa dimensión se logra desagregando el índice de demandas ω, resultando la Figura 28.

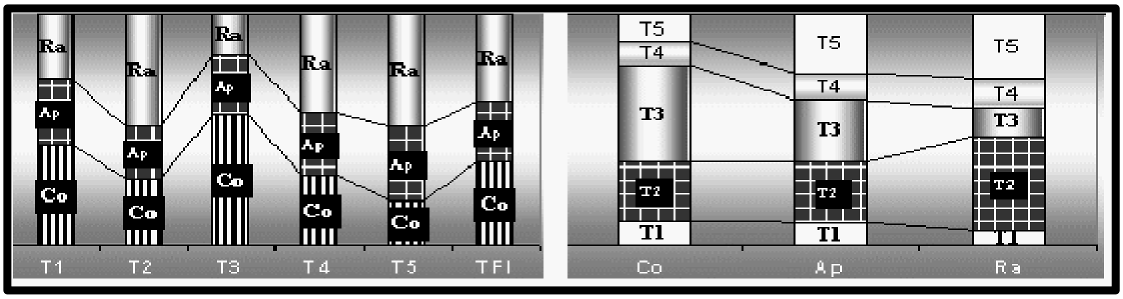
Figura 28. El índice de demandas ω desagregado por dominios



Fuente: elaboración propia

Puede observarse que: (a) la carga de información por unidad de ejercicios incluida en el dominio del conocimiento es similar para los cuatro textos con el mayor valor en el texto T1 ($\omega_{Co1} = 1.8$), (b) los textos T5 y T2 tienen los valores más altos de proporción dedicada al dominio del Razonamiento ($\omega_{Ra5} = 3.0$, $\omega_{Ra2} = 2.7$), mientras que la proporción mínima se alcanza en el texto T3 ($\omega_{Ra3} = 0.4$), ubicándose los restantes en valores intermedios, (c) en lo que respecta al dominio de la Aplicación, el máximo es alcanzado en T5 (ω_{Ap5} = 1.9), mientras que el mínimo se tiene en T3 (ω_{Ap3} = 0.6) siendo los valores muy intermedios de los restantes textos muy similares.

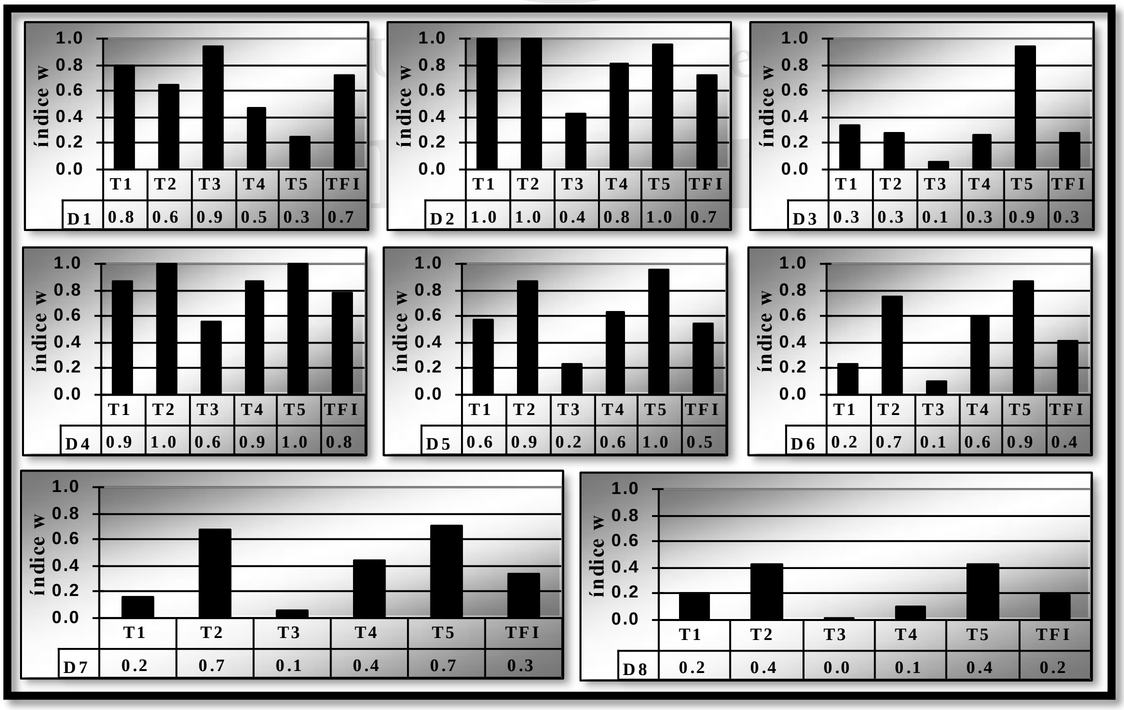
Figura 29. Doble lectura de la distribución de demandas: a la izquierda la distribución de demandas para cada texto; a la derecha, la distribución de textos sobre cada demanda



Fuente: elaboración propia

En la Figura 29 se condensan estos resultados desagregando las dos direcciones de lectura de la matriz de demandas: la de los dominios cognitivos y en la de los textos. Se ha añadido un texto ficticio (TFI) cargado con las proporciones de la demanda del conjunto completo de textos, a los efectos de facilitar visualmente la comparación.

Figura 30. La distribución del índice ω desagregado por componentes de la demanda cognitiva

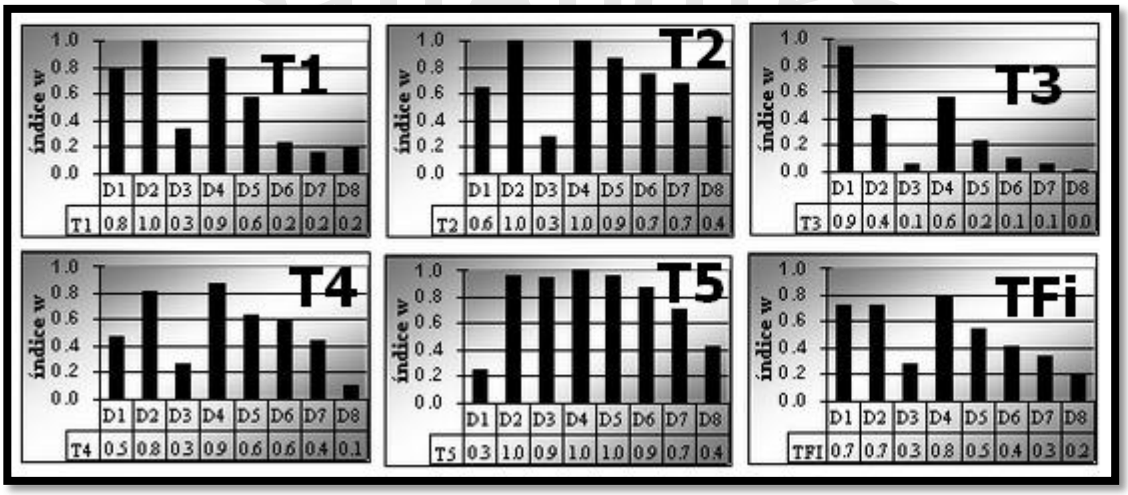


Fuente: elaboración propia

En un tercer nivel de desagregación ya se tiene el índice ω para cada una de las ocho componentes de la demanda distribuida en los cinco textos de la muestra. Se presenta la información para cada uno de los textos acompañada por la distribución tal como se verifica en el texto ficticio TFI.

Los resultados salientes de la Figura 30 son los siguientes. (D1) Las actividades del texto T5 no se hallan dirigidas especialmente al cálculo, dimensión que tiene una importancia mayoritaria en los textos T3, T1. (D2) El único texto que se ubica por debajo de la media en la dimensión de reconocer significados es T3. (D3) La demanda de alternar entre representaciones es baja y similar a la media para los textos T1, T2, T4; es elevada en T5, y baja en T3. (D4) La exigencia de estrategias de resolución de problemas de rutina está cubierta por encima de la media en todos los textos excepto T3. (D5, D6) La dimensión del análisis y la generalización es alta en los textos T2, T5, siendo mínima en T3. (D7, D8) La proporción de actividades dirigidas a la abstracción e integración es relativamente alta en los textos T5, T2 y escasa o nula en T3. La desagregación del índice a través de los textos se muestra en la Figura 31. Se señala que la estructura del texto ficticio recoge los rasgos del conjunto, esto es una disminución en la proporción de ejercicios que cubren las demandas más elevadas: una superposición virtual del texto TFi sobre cada uno de los textos T_k permite apreciar la distancia que lo aleja de ese texto ficticio promedio.

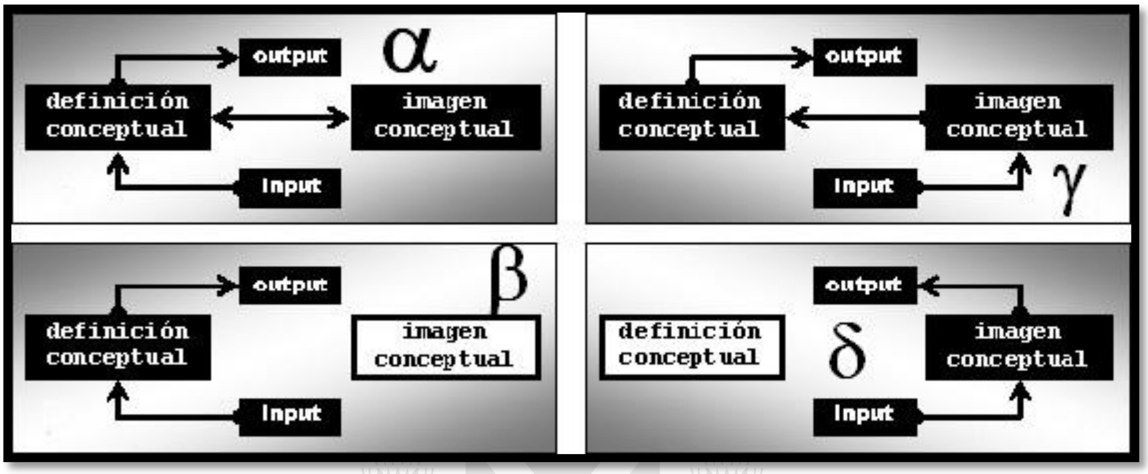
Figura 31. La distribución del índice ω a través de los textos y las componentes de las demandas



Fuente: elaboración propia

Partiendo de los comportamientos que la teoría AMT predice como activados por los diferentes tipos de ejercicios reproducidos en la Figura 32 (Cf. u. s. 2.2), puede decirse que los textos T2, T5 conceden más oportunidades a los α-comportamientos y β-comportamientos, el texto T3 al δ-comportamiento mientras que los textos T1, T4 presentan características intermedias.

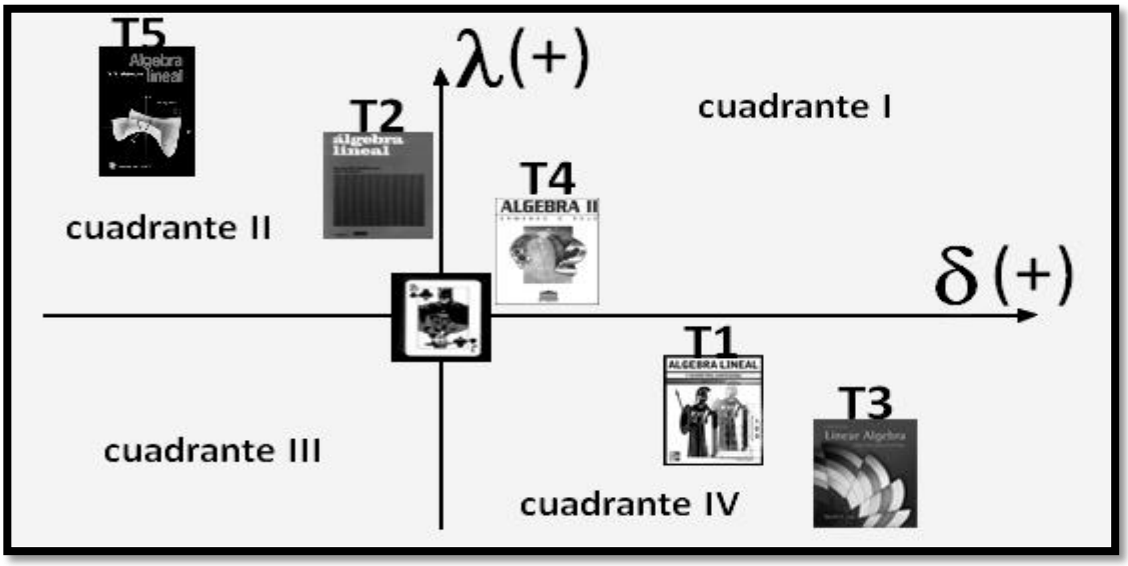
Figura 32. Tipología de comportamientos activados



Fuente: elaboración propia

Teniendo en cuenta que los tres comportamientos α, β, γ tienen el rasgo común de activar la celda de la definición conceptual, lo que los diferencia de δ, pueden subsumirse los tres primeros en una misma categoría, operando así una reducción del espacio de comportamientos (Barton 1971, 59-68). Llamando λ a la nueva categoría, definida intensionalmente por el pasaje a través de la definición conceptual –la definición extensional de λ es $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cup \beta \cup \gamma$– el espacio de comportamientos se torna bidimensional, con ejes δ–λ, pudiéndose ubicar los textos según su posición en este espacio, ubicando el origen de coordenadas en el texto ficticio, para mejor medir las dispersiones respecto a este centro. Los resultados de las figuras anteriores pueden ahora formularse en los siguientes términos: el texto T1 estimula un alto componente de comportamientos δ y escasos comportamientos λ, el texto T2 presenta alto componente λ, bajo δ; el texto T3 alto δ con muy bajo λ, el texto T4 valores moderados de δ y de λ, el texto T5 con elevado componente λ y escaso δ, lo que se resume en la Figura 33.

Figura 33. La situación de los textos T1, T2, T3, T4, T5 en el espacio δ–λ de comportamientos

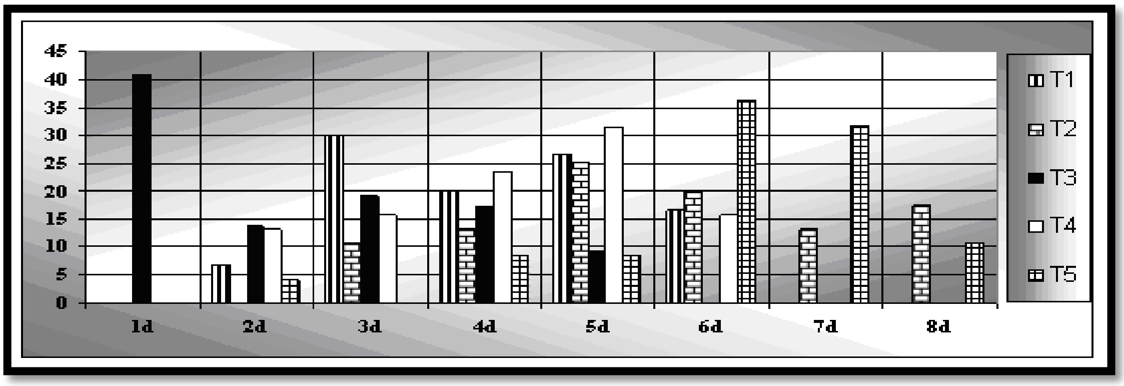


Fuente: elaboración propia

Puede observarse en la figura anterior que el tercer cuadrante (–δ, –λ) está despoblado, lo que indica que todos los textos estimulan algún comportamiento. El cuarto cuadrante (+δ, –λ) es la zona en que las demandas cognitivas no están dirigidas intensivamente a la abstracción y generalización, situación opuesta a la del segundo cuadrante (–δ, +λ). Finalmente, el primer cuadrante es el de las moderadas demandas en ambos comportamientos. También se observa que los textos que habitan el segundo cuadrante son ambos narrativos, los que se ubican en el cuarto cuadrante son ambos rotulados y que el único del primer cuadrante es de estilo mixto.

La Figura 34 presenta la proporción de ejercicios de cada texto en la que se halla presente exactamente una cantidad dada de demandas. Puede observarse que casi la mitad de los ejercicios del texto T3 contienen solamente una de las demandas, y que es nula la cantidad de ejercicios cuya exigencia supera las cinco demandas. Lo opuesto puede decirse de los textos T2, T5, donde ninguno de sus ejercicios contiene solamente una demanda, en tanto que son los únicos en contener ejercicios con más de siete demandas. Los restantes se encuentran en posiciones intermedias, pudiéndose observar que el texto T4 se encuentra más próximo a T2, T5, mientras que T1 se acerca más a T3, con la proximidad medida respecto a la cantidad de demandas presentes.

Figura 34. Cantidad de ejercicios de cada texto (ordenadas) que contiene exactamente una dada cantidad de componentes de la demanda cognitiva (abscisas)

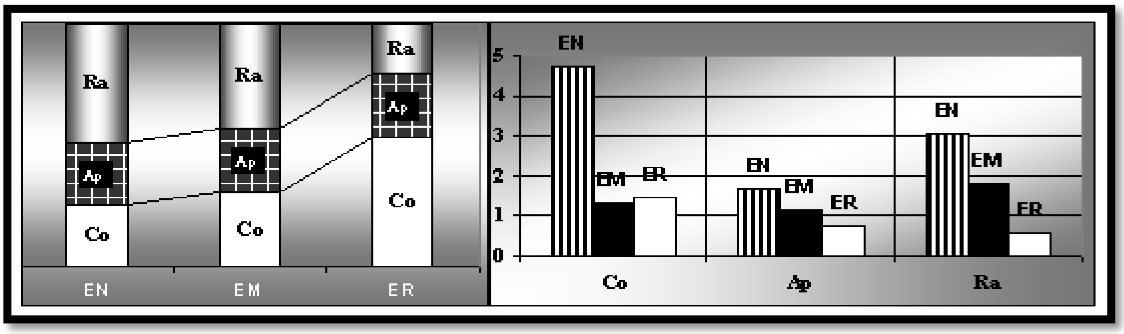


Fuente: elaboración propia

4.4. Resultados de estilos, demandas y referencias

Finalmente, en este apartado se presentan algunas de las relaciones binarias más salientes entre los estilos y las demandas, y algunas ternarias haciendo intervenir también el nivel de referencia. La Figura 35 presenta la relación entre la cantidad de demandas cognitivas y los estilos de prosa, desagregada en los tres dominios de demanda. El panel izquierdo muestra el modo en que el dominio del Razonamiento disminuye desde un máximo en el estilo narrativo hacia un mínimo en el estilo rotulado, sucediendo a la inversa con el dominio del conocimiento. El panel derecho presenta la relación de modo inverso, haciendo la regresión del índice ω sobre los dominios, para cada estilo, observándose el estilo narrativo con un índice superior en todos los dominios (y en una relación mayor al elevarse el dominio), siendo el estilo mixto más próximo al narrativo en el dominio superior, en tanto que se aproxima más al rotulado en dominio inferior.

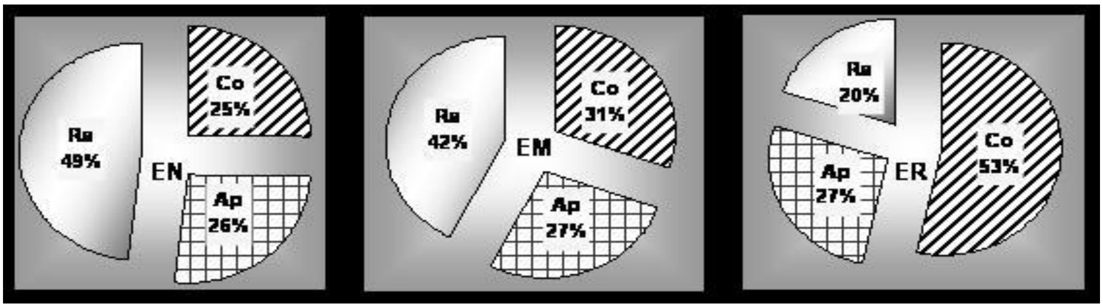
Figura 35. Distribución de las demandas cognitivas a través de los estilos (panel izquierdo) y de los estilos sobre las demandas cognitiva (panel derecho)



Fuente: elaboración propia

La Figura 36 permite apreciar la fuerte diferencia en la composición de las demandas cognitivas según los diferentes estilos. Puede observarse una estable participación del aspecto de Aplicación, mientras que la dimensión de Razonamiento presenta una marcada reducción desde casi la mitad en los textos narrativos hasta sólo una quinta parte en los textos rotulados.

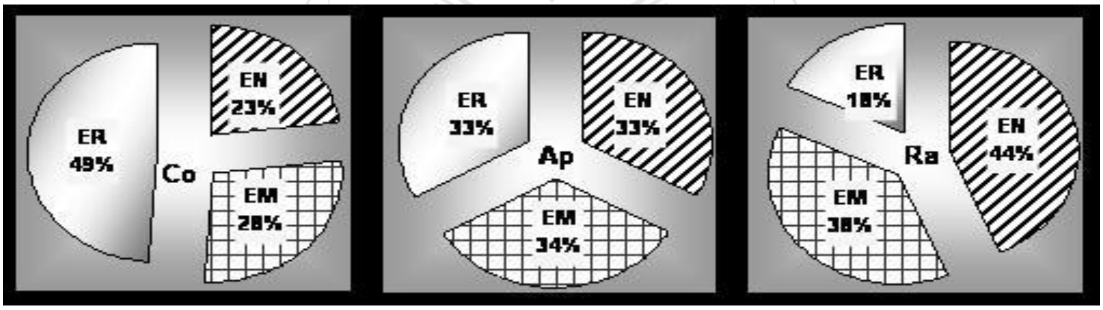
362. Distribución de los dominios cognitivos a través de los estilos de prosa



Fuente: elaboración propia

La figura 37 presenta la misma distribución de la figura anterior, pero ahora a través de cada uno de los dominios cognitivos.

Figura 37. Distribución de los estilos de prosa a través de los dominios cognitivos



Fuente: elaboración propia

Se aprecia en la Figura 37 que la cuota de participación del estilo narrativo se incrementa en tanto se asciende en la intensidad de demandas cognitivas, mientras que lo inverso sucede con el estilo rotulado. La participación del estilo mixto es bastante estable en los diferentes dominios.

Finalmente, reuniendo tanto los estilos de prosa, los niveles de referencia y las demandas cognitivas pueden anotarse tres resultados adicionales (a, b, c) al que se añade un resultado (d) que proviene de un cotejo lateral de información en el tiempo.

(a) Los textos con mayores niveles de demanda cognitiva se corresponden con los textos escritos con un estilo narrativo, los que a su vez son citados con menos frecuencia en las universidades.

(b) El mayor número de referencias de las universidades se corresponde con el estilo mixto, cuyo comportamiento ante las demandas cognitivas se sitúa en una posición intermedia entre el estilo narrativo y el rotulado.

(c) El estilo rotulado ocupa una posición intermedia en el número de referencias, y la escala más baja en la intensidad de las demandas cognitivas.

(d) Las bibliografías no se modificaron en un período observado de cinco años (2008–2013). La tesis de maestría del autor (Acero 2009) relevaba las bibliografías en el año 2008. En el transcurso, solo un texto de álgebra lineal se ha incorporado a las librerías[30], pero ninguna de las bibliografías revisadas lo ha registrado. Tampoco se observa una movilidad en cuanto a la incorporación de nuevas ediciones de los textos, posiblemente porque siga siendo considerado el mismo objeto, lo que no es confirmado en los hechos. Para citar un caso, el libro de álgebra lineal del profesor Gilbert Strang, es continuamente reeditado, y las modificaciones no son menores en cuanto a estilos de prosa y también en demandas cognitivas.

[30] Problemas resueltos de álgebra lineal de Arvesu Carballo y otros autores, publicado por la editorial Paraninfo en 2005 solo se incorporó a las librerías locales hacia mediados del 2010.

CAPÍTULO 7

REFLEXIONES FINALES

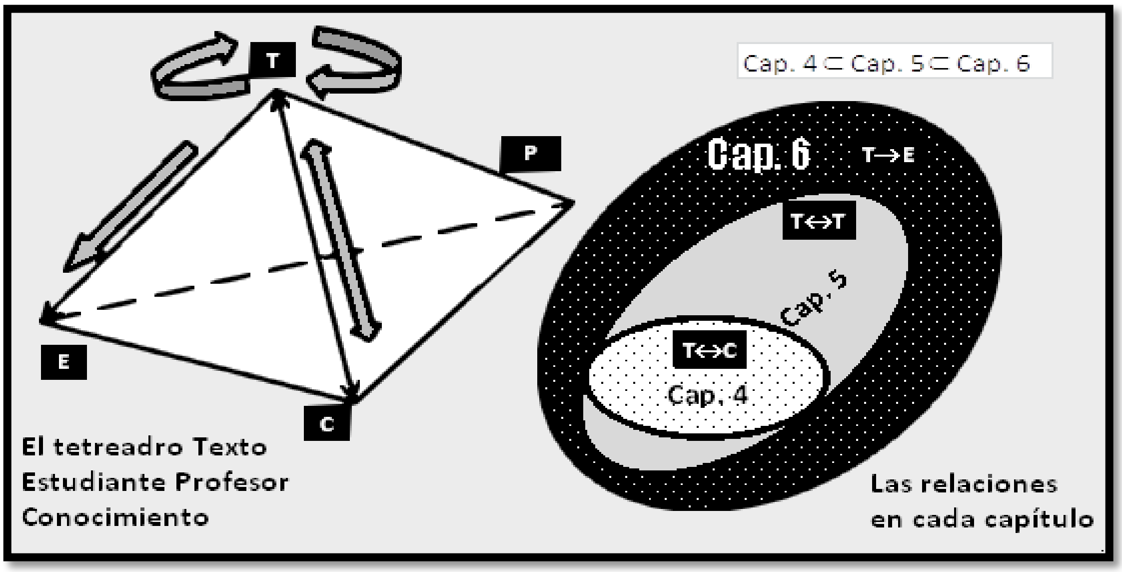
1. Introducción

En cada uno de los capítulos centrales fueron detalladas las conclusiones parciales y una breve discusión acerca de los resultados localmente obtenidos: en el punto 4 del capítulo 4 se analizan los resultados pertinentes a la abstracción, en el punto 4 del capítulo 5 los correspondientes a la intertextualidad, y en el punto 4 del capítulo 6 se da la discusión acerca de los resultados que relacionan demandas cognitivas y estilos. En todos ellos, la discusión se mantiene, por así decirlo, en la frontera natural de su correspondiente capítulo. Esta sección tiene tres partes: la primera, un muy breve resumen de los resultados; la segunda, una síntesis que incluye las relaciones mutuas entre esos resultados; la tercera, un panorama de problemas abiertos en esta investigación.

2. Resumen

Los tres capítulos centrales de esta tesis han sido diseñados de manera que cada uno amplía el radio de alcance del anterior, en lo que respecta a las relaciones entre T (texto), C (conocimiento matemático), E (estudiante) del modelo teórico de Rezat oportunamente presentado; la Figura 1 resume y esquematiza las relaciones estudiadas en cada capítulo.

Figura 1. La lógica envolvente desarrollada en esta tesis: el análisis de cada relación habilita al de la relación de orden siguiente en el modelo teórico del tetraedro (Rezat 2006)



Fuente: elaboración propia

La Figura 1, que da cuenta de la lógica de la secuencia de investigación, muestra que una vez que el capítulo 4 probó la estabilidad de la abstracción a través de los textos, se pasó en el capítulo 5 a la prueba de la inestabilidad de un concepto fijo al intercambiar textos, para finalmente en el capítulo 6 analizar las presentaciones de los conceptos en sus demandas hacia el estudiante. La notación Cap. 4 $\subset$ Cap. 5 $\subset$ Cap. 6, al igual que su representación gráfica, muestran que cada capítulo *también* hace intervenir en su análisis la relación del capítulo anterior, y que la inclusión es estricta pues *añade* una no incluida en el previo.

2.1. Abstracción

La evidencia recogida en el capítulo 4 es consistente con las notas esenciales de la abstracción en el nivel universitario marcadas en el marco teórico, dándose con una intensidad regular que no reconoce discontinuidades medibles a través de los conceptos, ni tampoco a lo largo de los textos. La abstracción *teórica*, la dualidad del proceso y del concepto cristalizada en el símbolo, la necesidad de encapsular los procesos en conceptos, la elevada compresión de las definiciones, la centralidad de las relaciones entre los objetos antes que los objetos mismos: todos rasgos que se mantienen relativamente estables al pasar de un concepto a otro, o de un texto a otro. Esa relativa estabilidad no implica, sin embargo, que la abstracción en el nivel universitario sea plana y no reconozca, ya dentro de esa categoría y sin variar su naturaleza, diferencias de grados (por ejemplo el de pasar del concepto de *superficie* al de *variedad*).

En cambio, no se confirman las afirmaciones de muchos autores del AMT (Cf. Capítulo 1) en lo que respecta a la presentación misma de los conceptos, a través de las definiciones. La mayoría de los textos no presenta las definiciones como si fuesen suficientes para que el lector construya a partir de ellas el concepto que se está definiendo. Más bien puede observarse en ellos una nítida intención pedagógica con una preocupación por ofrecer diversos registros de representación que van conformando los perfiles del objeto que finalmente quedará cristalizado en la definición. Y hasta puede decirse que siguen de cerca procedimientos recomendados por el AMT tales como "trabajar con una representación simple, trabajar con varias representaciones en paralelo, relacionar las representaciones en paralelo, integrar las representaciones y sus intercambios" (Dreyfus 1991, 39).

Con una probabilidad superior al 99% puede afirmarse que es falso que “la cultura dominante de la enseñanza de la matemática presenta a los estudiantes productos terminados usando el lenguaje abstracto de los símbolos […] modelo promovido en los libros de texto” (Kinard y Kozulin 2008, 107). Una proporción estadísticamente cercana a la mitad de los textos de la población –28 textos entre los de uso local y en el extranjero– lo desmiente.

Puede hablarse para la mayoría de los textos de un desfase en la magnitud del salto de abstracción que varía con el registro de representación. Dicho de otro modo, se comprobó una regularidad estadísticamente significativa de los textos con una regularidad construida a través del análisis de la muestra. Se presentan, entonces, definiciones de conceptos ya vistos en niveles inferiores, pero aumentando el nivel de abstracción, de modo que el objeto anterior quede subsumido en el nuevo sin que haya ninguna marca sensible de que se haya producido el salto: lo que es de por sí una ventaja del lenguaje formal impide al lector advertir de las dificultades que eso supone cuando se intenta una aprehensión en los registros de representación no formales del concepto.

Para todos los conceptos analizados, la naturaleza de la abstracción se ubica plenamente en la zona de la *abstracción teórica*, y los conceptos mismos son, en el lenguaje de Cassirer del tipo de *concepto-relación*, que no proceden de una abstracción empírica como el *concepto-cosa*, sino que son constituidos por la definición misma. El ejemplo de uno de los conceptos analizados –función– tanto en su cristalización actual como en sus orígenes, nunca puede ser comprendido como abstracción empírica, ni siquiera en sus orígenes arcaicos (G. Schubring 2012, G. Schubring 1987, Dahan-Dalmedico y Pfeiffer 1986). Si esto se predica del concepto de función, con no menos fuerza puede decirse de aquellos que la utilizan como objeto o como sujeto: límite, continuidad, derivadas, integrales… Las conclusiones resultan válidas estadísticamente para la población de conceptos y de textos en las diversas áreas.

2.2. Intertextualidad

Probada la estabilidad bivariable del tipo de abstracción respecto de los conceptos y respecto de los textos en conjunto en el capítulo 4, del análisis del capítulo 5 de la variación de un concepto fijo respecto de los textos –ahora 59 textos entre los de uso local y los del extranjero– qudó probada su inestabilidad, que tiene una doble dimensión: no solo es inestable por la multitud de referentes del mismo significante, sino que, en cierta medida como consecuencia directa, arrastra a los mismos valores de verdad de las proposiciones que toman al concepto fijo como argumento. Estas proposiciones pueden llegar a tener el rango de teorema, siendo verdaderas en un texto y falsas en otro. De hecho, queda probado un resultado todavía más fuerte, y es que para cada texto de la población T_1 puede definirse un concepto C_1 que no lo es tal para T_2, y recíprocamente, que para T_2 puede definirse un concepto C_2 que no lo es para T_1; más aún: existe un tercer texto T_3 para el que tanto C_1 como C_2 satisfacen su propia definición del concepto, esto es $\forall C_1 \in T_1\ \exists C_2 \in T_2\ \exists T_3$: $C_1 \notin T_2$, $C_2 \notin T_1$, $C_1 \in T_3$, $C_2 \in T_3$.

De allí se prueba que si con K_1 y K_2 se designan dos universos de discursos en sendos libros de texto, con la condición de que el objeto designado por C en K_1 sea diferente del que le asigna K_2, y *p* es una proposición acerca de C, entonces puede resultar que las dos siguientes afirmaciones sean verdaderas: (a) La proposición *p* (C) es *verdadera* en K_1; (b) La proposición *p* (C) es *falsa* en K_2. Entonces el lector debería concebir el valor de verdad de una proposición *p* como una función de dos variables: la proposición misma y el marco textual que la contiene. Así L(*p*) no es por sí misma verdadera o falsa, sino que lo es L(*p*, *t*), pudiendo darse L(*p*, t_1) verdadera (*p* es verdadera en el universo de discurso del texto t_1) y también L(*p*, t_2) falsa (*p* es falsa en el universo de discurso del texto t_2). El lector de dos textos de estas características resulta sometido a demandas cognitivas superiores que aquel que solo lee uno cualquiera de ellos.

2.3. Demandas y estilos

En la población de textos –50 textos de uso local– los tres estilos de prosa tienen una representación similar, siendo ligeramente minoritario el narrativo; su presencia en las bibliografías es muy variable, desde solo una hasta llegar a dieciocho menciones. Las bibliografías muestran también una gran dispersión en el número de textos que la componen, con una media de 6.2 textos, con valores que oscilan entre tres y catorce títulos. La mayoría (71%) de los textos de estilo narrativo tiene poca presencia en las bibliografías; por el contrario, los de estilo rotulado, por el contrario, son los mayormente citados. Los de estilo mixto tienen una distribución relativamente uniforme.

El instrumento construido para el relevamiento de las demandas cognitivas prueba tener una confiabilidad conforme al test derivado de las teorías de la información (κ–Fleiss), que mide el grado de acuerdo entre cuatro observadores que asignan segmentos de prosa a un número reducido de categorías. El test mismo asegura medidas de concordancia significativas por encima del azar. Las medidas se obtienen mediante matrices de confiabilidad para cada una de las componentes de la demanda cognitiva.

El análisis de la matriz de demandas cognitivas (342 filas por 8 columnas) incluye un texto ficticio que sirve de patrón de comparación, definido con los valores medios de las componentes de un índice de demandas a su vez construido para neutralizar las diferencias en valores absolutos de cada texto. Una reducción del espacio de propiedades de las demandas cognitivas efectuada a lo largo del eje de las definiciones resulta en la construcción de un sistema bidimensional con ejes que miden la composición de las demandas en relación a la necesidad de consultar las definiciones formales o la posibilidad de soslayarlas. El espacio así constituido, con el texto ficticio en el centro de coordenadas, se convierte en un mapa sobre el que se ubican los textos de la muestra, revelando sus distanciamientos. Los textos con mayores niveles de demanda cognitiva se corresponden con los textos escritos con un estilo narrativo, los que a su vez son citados con menos frecuencia en las universidades. El mayor número de referencias de las universidades se corresponde con el estilo mixto, cuyo comportamiento ante las demandas cognitivas se sitúa en una posición intermedia entre el estilo narrativo y el rotulado. El estilo rotulado ocupa una posición intermedia en el número de referencias, y la escala más baja en la intensidad de las demandas cognitivas. Las bibliografías revisadas no registran incorporaciones ni bajas en el período 2008–2013, transcurrido entre el relevamiento del autor para su tesis de maestría y el actual.

3. Síntesis y discusión

Si en los libros de texto se hace una partición gruesa entre lo *matemático formal* (el lugar donde se encuentran los axiomas, las definiciones, los teoremas y las pruebas) y lo *matemático informal* (donde caben las introducciones, los ejemplos, las representaciones, las analogías, las aplicaciones, las motivaciones, las explicaciones metamatemáticas…) se encuentra en esta tesis que un texto difiere de otro no solo por la matemática informal, sino también por la formal. Así como el capítulo 4 prueba la semejanza en un aspecto de la matemática formal, el de la abstracción, el capítulo 5 se encarga de probar la diferencia en otro aspecto de la misma matemática formal, como es la presentación de un concepto fijo; el capítulo 6, por su lado, muestra las profundas diferencias en lo informal construyendo diversos índices en introduciendo una métrica que permita una estimación de sus magnitudes.

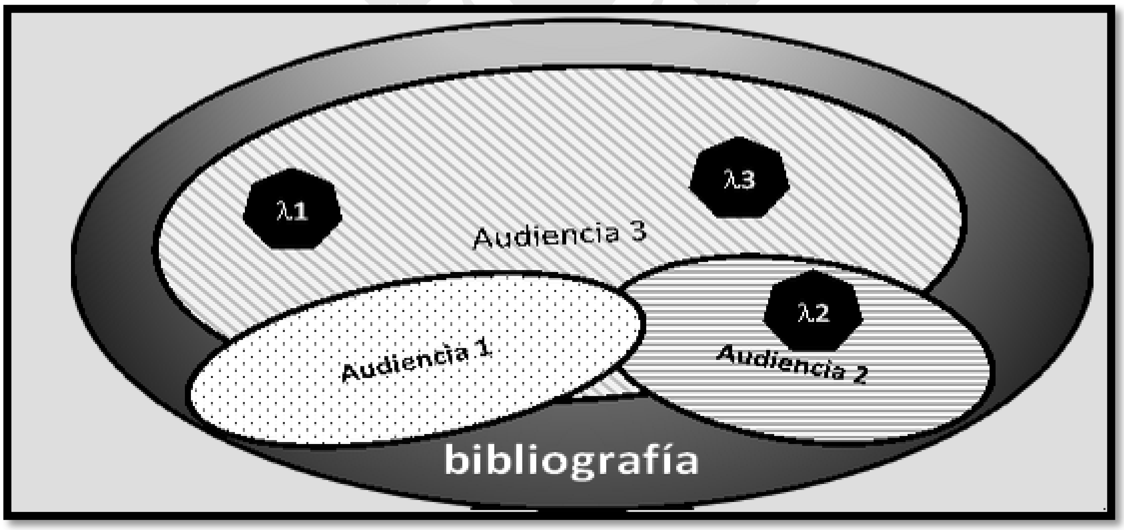
Dos motivos han sido invocados para hacer visible esta distinción: la facilitación de la lectura y la diversidad de lectores. Si se acepta que parte del esfuerzo que un lector dedica a la transformación de símbolos en objetos significativos se deriva hacia el descubrimiento de una estructura en el texto, cuanto más visible y explícita sea esa estructura, más energía disponible tiene el lector para dirigir a los contenidos sustantivos. En cuanto a la documentada diversidad de lectores (Halmos 2012), estarán los que dicen “muéstreme la matemática, que yo me construiré mi propia filosofía” y aquellos a los que las definiciones y teoremas los sumen en una desorientación, si el autor no se erige como guía del conjunto para dotarlo de sentido; entre estos dos tipos, toda la gama de actitudes intermedias juzgará de modo diverso el mismo texto.

La diferenciación entre ambos extremos medida en el capítulo 6, a través de los estilos de prosa, muestra con qué intensidad los autores adhieren a este principio de separación. Si el capítulo 4 prueba que los rasgos duros de la abstracción no varían de un autor a otro, el capítulo 6 prueba que son muchas las maneras de presentarlo. Hasta se da el caso que un mismo autor pueda mudar de estilo de una edición a otra, lo que pudo observarse en el citado caso del texto del profesor del MIT (Strang 1988, 2006) entre la tercera y la cuarta edición, separadas por ocho años.

En el capítulo 5 se pone de manifiesto la elevada compresión de las definiciones, y la escasez de *redundancia,* de modo que toda referencia a un concepto ya definido no viene acompañada de una breve explicación, o al menos señalización del parágrafo donde puede recuperarse su definición. En esa franja limitada, sin embargo, los autores relevados se reparten entre un extremo de redundancia casi nula, hasta otros más generosos al parafrasear en términos informales la definición del concepto cuando es reutilizado. El AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) considera uno de los errores que malogran un texto el no ‘hablarle a alguien’, entendiendo por ello la falta de definición del segmento específico de lectores al que su libro pretende estar dirigido; aun cuando la audiencia imaginada por el autor no coincida con la real, dice Paul Halmos, “es preferible tener bien definido un blanco y acertarle a otro que no darle a nadie por tener un blanco demasiado amplio o difuso” (2012, 23). Si un texto puede resultar fallido por dirigirse erráticamente a un púbico muy diverso, entonces también puede serlo por estar incluido en el mismo nivel que otros, cada uno de ellos con sus audiencias específicas no coincidentes, esto es suponiendo que el texto T_1 se dirige a la audiencia A_1, T_2 a A_2, y además $A_1 \neq A_2$, para un lector λ que no pertenece a la intersección $A_1 \cap A_2$ será necesario que escoja cuál le ha sido destinado.

La audiencia esperada es la que define el nivel de redundancia del texto, y si en una bibliografía se incluyen textos de diferentes niveles, resultarán correlativas diferencias en la capacidad lectora demandada por cada uno de ellos. Los capítulos 5 y 6 que analizan relaciones texto-texto presentan las pruebas de que las diferencias son significativas para textos que comparten la misma bibliografía, y por lo tanto, potencialmente, un mismo lector.

Figura 2. Lectores λ en el espacio de las audiencias de una bibliografía



Fuente: elaboración propia

Una situación en el universo de posibilidades se resume en la Figura 2 en la que los lectores representados como λ_2 y λ_3 están leyendo un texto que ha sido escrito para ellos, mientras que el lector λ_1 lee un texto que ha sido escrito para una audiencia más amplia que la del suyo propio, pero que no la incluye totalmente. En esta tesis se han relevado bibliografías de hasta catorce textos para cursos que en algunos casos superan el millar de lectores, de modo que las distribuciones superan largamente la ilustrada en la figura (podrían ser del orden de 10^{10}). Una de las disposiciones –indeseable– que no ocasiona distribuciones desacopladas es la de textos 'desiertos': ningún alumno utiliza texto alguno.

En todas las bibliografías de los medios locales, y en la mayoría de las bibliografías de universidades extranjeras, la bibliografía es plana, o casi plana: se presenta como un listado de textos con a lo sumo una distinción entre bibliografía básica y bibliografía obligatoria. Si en alguna de ellas conviven textos que esta tesis ha clasificado en diversas clases en lo que se refiere a demandas cognitivas, a niveles de abstracción y a cuestiones conceptuales sustantivas, entonces un lector que no es un experto debe decidir cuál –cuáles– de los textos le acompañarán en su aprendizaje, sin otra referencia que un orden alfabético en un listado casi indiferenciado. Como esta tesis ha probado la heterogeneidad en todos estos niveles (abstracción, significación, cognitivo) en sendos capítulos, y también verificado la pertenencia de textos disímiles a una misma bibliografía plana, la situación del alumno-lector no es hipotética, sino que se da efectivamente en todos esos casos.

Considerando los resultados obtenidos acerca de la heterogeneidad multidimensional de las fuentes que componen una bibliografía y sus consecuencias, cabe preguntarse por los propósitos por los que se constituyen de ese modo. Si se parte del siguiente listado (Acero 2012a): (a) ofrecer al alumno un muestrario de textos que se consideran valiosos (sin intención de que sean leídos en conjunto); (b) una necesidad derivada de que los contenidos C comprendidos por la asignatura no sean cubiertos por ningún texto T_k ($C \not\subset T_k$) pero sí por su reunión ($C \subset \cup T_k$); (c) que exista un interés de ofrecer múltiples enfoques de un dado contenido, esto es $C \subset (T_k \cap T_j)$ para $k \neq j$; (d) la intención de ofrecer un menú de amplitud suficiente para que cada alumno pueda encontrar el que mejor se adapte a su situación y necesidades, esto es a presentar una base suficientemente numerosa de modo que para cada alumno λ exista un k tal que el par (λ, T_k) optimice alguna función de lectura. Cualquiera de las posibilidades, o sus combinaciones, aumenta la dificultad y distancia entre el estudiante y la masa de textos de una lista bibliográfica que se le impone sin apenas un comentario que le permita decidir entre ellos. Si es el caso (a) la bibliografía es directamente ignorada, pues aunque pudiese ser apreciada como muestrario por un profesor, le es inútil al alumno. El caso (b) exigiría la información de cómo se logra el cubrimiento de los contenidos C, qué sectores de cada texto T_k cubren mejor qué sectores de los contenidos. Si es (c), habría de acompañarse de qué contenidos convendría ser considerados por más de un texto, y cómo resolver, sin pericia lectora, conflictos como los evidenciados en el capítulo 5 de intertextualidad. Si, finalmente, es (d), la optimización del apareamiento no es conjeturable sin que el alumno disponga de información de los rasgos generales de cada texto. Resulta así que un modo de atenuar las dificultades es introducir, junto a la bibliografía, comentarios que permitan al estudiante elegir cursos de acción distintos a la desconexión de un sistema de códigos que no reconoce. Los comentarios debieran aclarar en qué medida (cuantitativa) y modo (cualitativo) el texto cubre los diversos contenidos, qué nivel de madurez requiere su lectura, qué tipo de presentación puede esperarse de elegir ese texto, o cómo se complementa ese texto con los restantes.

4. Líneas abiertas

Esta tesis ha procurado cumplir criterios estandarizados de calidad. La calidad de una investigación ha sido abordada desde diferentes perspectivas y con diversos acentos metodológicos y sustantivos (Neuendorf 2012, Krippendorff 1990, R. Weber 2012, Leray 2008, Galtung 1978, Sautu, y otros 2005, Krippendorff, 2012) que pueden agruparse en cinco clases (Acero 2009, 116-121): (a) debe contribuir al campo teórico en que se desarrolla; (b) debe resultar relevante, y sus resultados de interés para mejorar las prácticas de los actores o procesos implicados en la investigación y situarse en un lugar de vacancia entre las investigaciones existentes; (c) los métodos y procedimientos empleados deben ser transparentados en la investigación, exhibiendo su consistencia y convergencia; (d) los resultados deben sustentarse en datos de pública accesibilidad y los instrumentos empleados deben tener una validez interna que mantenga controlados los sesgos del investigador; (e) debe dejar abiertas nuevas líneas de investigación.

En el aspecto (a), el estudio puede considerarse una aplicación del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) a las áreas del Álgebra lineal y el Cálculo (Cf. Capítulos 4-6) analizando los modos específicos en que se verifican sus supuestos en los textos (y la falsación de la hipótesis de la confianza en la capacidad didáctica de las definiciones, Cf. Capítulo 4.4). Por otro lado, aporta un instrumento de medición de demandas calibrado con sensibilidad suficiente para el área del álgebra lineal.

En lo que respecta a (b), ha sido expuesta oportunamente (Cf. Capítulo 1) la importancia de conocer las características de los textos, dadas las documentadas dificultades para su incorporación a las prácticas curriculares y la relativa escasez de investigaciones en el área específica de la matemática avanzada. Los resultados pueden ser tomados en cuenta para la introducción de prácticas que acorten la distancia entre el texto y sus potenciales lectores (Cf. u. s. 3, como un ejemplo).

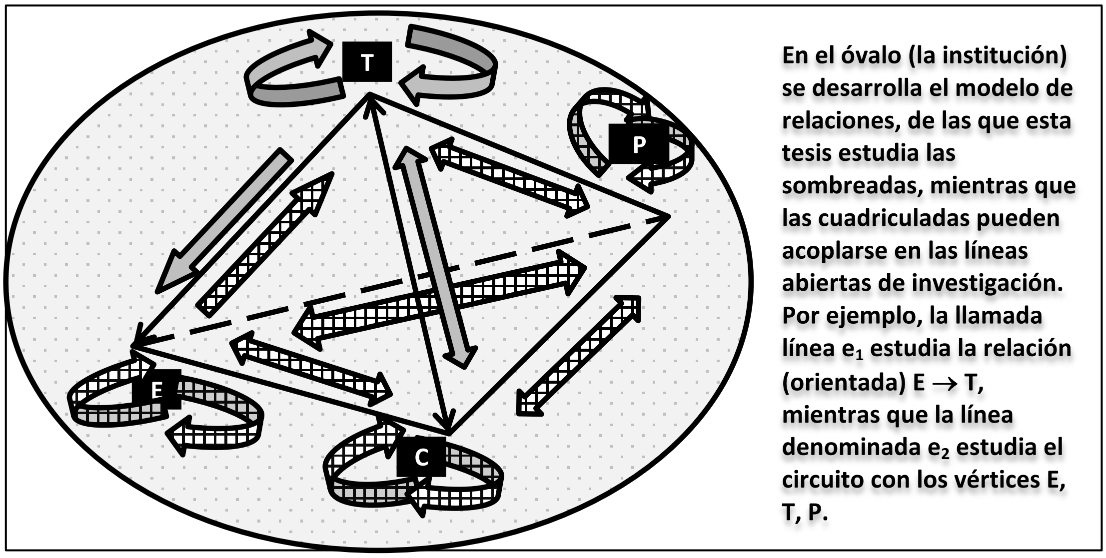
Los ítems (c) y (d) han sido completamente documentados tanto en el ámbito global (Cf. Capítulo 3) como local (Cf. Capítulos 4.3, 4.4, 5.3, 5.4, 6.3, 6.4), detallando la población de materiales, los criterios de selección de muestras conforme a los objetivos, los instrumentos de análisis, la construcción de variables, la reproducción de las fuentes sobre las que operan las inferencias de contenido, el proceso por el que se obtienen las inferencias mismas y, cuando procede, el regreso a la población mediante una estimación estadística invirtiendo los filtros muestrales, consignándose también en qué nivel de significación pueden predicarse los resultados respecto a la población.

Finalmente, el aspecto (e), de las líneas abiertas por la investigación, puede deducirse de las limitaciones de la perspectiva teórica, de las limitaciones del objeto una vez fijada esa perspectiva, y de los mismos resultados.

En el modelo teórico del tetraedro (Cf. u. s. 2, y aquí Figura 3), esta tesis puede ser etiquetada como el estudio de $C \leftrightarrow T \rightarrow E$. Si se consideran las aristas y caras sin explorar, resultan distintas líneas de investigación, algunas de las cuales se consignan en la siguiente lista. La primera (e_1) es la relación $E \rightarrow T$, con preguntas básicas que ahora se centran en la experiencia de los estudiantes con los textos, para así establecer relaciones entre las clasificaciones introducidas por este estudio y las que efectivamente surgieran desde la perspectiva de los lectores. Esta línea admite una bifurcación según que se considere la perspectiva del lector con solo libros de texto (e_{1t}) [31] o con texto procedente de múltiples fuentes (e_{2f}).

[31] Actualmente el autor participa de un proyecto que analiza las prácticas de lectura de los estudiantes de ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, que se inscribe en esta tipología (e_{1t}), sin disponer aún de resultados.

Figura 3. El modelo del tetraedro, las relaciones en esta tesis y las líneas abiertas



Fuente: elaboración propia

Próxima a esta línea, pero de mayor complejidad es (e_2), que ya incorpora la mediación del profesor y exigiría un diseño de investigación para estudiar las relaciones ternarias en el ciclo P $\rightarrow$ T $\rightarrow$ E $\rightarrow$ P que incluye la mediación del profesor y la realimentación de información que del uso de los textos hace el alumno al profesor. Una de las relaciones escasamente investigadas es P $\leftrightarrow$ T, lo que habilita el diseño de un estudio (e_3) del tipo P $\leftrightarrow$ T $\leftrightarrow$ C que establezca correspondencias entre los resultado de esta tesis contenidos en T $\leftrightarrow$ C con los que se obtuviesen del análisis de P $\leftrightarrow$ T. Siempre manteniéndose en el AMT, y dentro del tetraedro, las líneas prosiguen toda vez que se analicen relaciones en las que intervenga T con algunos o todos los vértices restantes.

Cada una de las líneas anteriores admite, a su vez, la introducción de la dimensión temporal (et), que puede ser abordada desde una doble perspectiva. En la primera (et_1), la escala temporal tiene dimensiones históricas referidas a la disciplina misma, y por lo tanto consideraría la evolución de la abstracción, los estilos, las demandas y la intertextualidad en esa escala temporal. La segunda (et_2) se mueve en la escala histórica de las ediciones, de modo que estudia la forma en que evolucionan las mimas variables con las sucesivas ediciones de un mismo texto, para lo que bastaría seguir la evolución de algunos de los textos estudiados en esta investigación (una breve noticia de este tenor se consigna en esta tesis en el capítulo 4, apartado 4, inciso d).

Ya fuera del tetraedro, aparecen las instituciones. O más bien cabe decir que las instituciones alojan, para cada asignatura, su propio tetraedro. Los mismos materiales producidos en este trabajo habilitan una investigación que considerara las bibliografías universitarias como una variable de estudio, de modo que las regresiones de los aspectos estudiados (abstracción, intertextualidad, demandas y estilos) operaran ya no sobre los textos, sino sobre las bibliografías institucionales. Las relaciones a investigar resultarían del procesamiento algebraico de las matrices de abstracción de intertextualidad, y de demandas, cruzadas con el grafo de universidades y textos. Para poner en relación estos resultados con el uso efectivo de los textos, esta línea (e*) posiblemente debiera cambiar su entorno conceptual al programa epistemológico más apto para la construcción de la actividad matemática en el lenguaje de las praxeologías de la TAD (*Théorie Anthropologique du Didactique*), que incluye explícitamente los conocimientos institucionalizados (Cf. Capítulo 2, apartado 2).

BIBLIOGRAFÍA

Abate, Marco, y Francesca Tovena. *Geometria Differenziale.* Primera edición. Milan: Springer, 2011.

Acero, Fernando. «Demandas cognitivas del álgebra lineal en textos universitarios de la Argentina.» *XXII encuentro del estado de la investigación educativa. El hacer de la investigación educativa. Una reflexión de los diseños metodológicos.* Córdoba: Universidad Católica de Córdoba, 2011b. 1-20.

Acero, Fernando. «Diferencial de Abstracción en el Ingreso a Ingeniería.» En *III Jornadas IPECYT 2012*, de Hilda Demartini y Ivonne Esteybar (Comps.), 1-13. San Juan: Editorial de la Universidad Nacional de San Juan, 1012b.

Acero, Fernando. «El sinuoso concepto de curva y los libros de texto.» En *JEIN 2011: I Jornada de Enseñanza de la Ingeniería*, de Zulma Cataldi y Fernando Lage (Comps.), 222-232. Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional, 2011c.

Acero, Fernando. «Estilos de prosa matemática y demandas cognitivas del álgebra lineal.» En *I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. ICIECyM.*, de María Otero, Inés Elichiribehety y María de los Ángeles Fanaro (Comps.), 1-20. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2011a.

Acero, Fernando. «Heterogeneidad bibliográfica en Ingeniería.» En *Artículos de las II Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería. JEIN 2012, Año 2, Volumen 1*, de Zulma Cataldi y Fernando Lage (Comps.), 103-110. Buenos Aires: UTN, 2012a.

Acero, Fernando. «Intertextualidad bibliográfica y el Cálculo Vectorial.» En *Trabajos Completos IPECYT2012*, de Hilda Demartini y Ivonne Esteybar (Comps.), 1-18. San Juan: Universidad Nacional de San uan, 2012d.

—. «La Abstracción de la Matemática en la Ingeniería. octubre de 2012.» *XVII EMCI (Educación Matemática en Carreras de Ingeniería). Octubre 2012.* Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional, 2012c. 1-15.

—. «Tesis de Maestría: Estructura del libro de texto universitario. Un análisis de textos de álgebra lineal.» *Universidad de San Andrés. Biblioteca. Catálogo de tesis.* 2009. http://asterion.udesa.edu.ar/F/JG67FAMSDRDFN6TU9CF4HYMEM1DX1XFJEHBH7GACV27FDHSNAP-15619?func=item-global&doc_library=USA01&doc_number=000052364&year=&volume=&sub_library=USATE (último acceso: 20 de junio de 2010).

Adams, Niall, Martin Crowder, Hand. David, y David Stephens. *Methods and Models in Statistics.* Primera edición. London: Imperial College Press, 2004.

Ahlfors, Lars. *Análisis de variable compleja. Introducción a la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja.* Primera edición en español [Original 1953, complex analysis (an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable)]. Traducido por A. Pardo Fraile. Madrid: Aguilar, 1971.

Aldous, Joan, y Robin Wilson. *Graphs and Applications. An Introductory Approach.* Segunda edición. London: Springer, 2004.

Alsina, Claudi. «Why the Professor mus be a Stimulating.» En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, de Derek Holton (ed.), 3-12. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Aman, Herbert, y Joachim Escher. *Analysis II.* Primera. Traducido por Silvio Levy y Matthew Cargo. Berlín: Birkhäuser, 2008.

American Educational Reasearc Association (AERA), . «Standards for Reporting in Empirical Social Science Research.» *Educational Researcher* (AERA Publications) 35, nº 6 (2006): 33-40.

Anglin, W.S. *Mathematics: A Concise History and Philosophy.* Primera edición. New York: Springer, 1994.

Anton, Howard, Irl Bivens, y Stephen Davis. *Calculus. Early Trascendentals. 10th Edition.* Décima. New York: Wiley and Sons, 2012.

Apostol, Tom. *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra.* Segunda edición. Vol. I. 2 vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

—. *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linearr algebra.* Segunda edición. Vol. II. II vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

—. *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty]. Traducido por Francisco Vélez Cantarell. Vol. II. 2 vols. Barcelona: Reverté, 1980.

—. *Calculus. Volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Segunda. Vol. I. 2 vols. Barcelona: Reverté, 2001.

Aristóteles. *Categorías.* Primera edición. Buenos Aires: Omeba, 1967d.

—. *Psicología. Tratado del alma.* Primera edición. Buenos Aires: Bibliográfica omeba, 1967a.

—. *Últimos Analíticos.* Primera edición. Buenos Aires: Omeba, 1967c.

Audin, Michèle. «Conseils aux auteurs de textes mathématiques.» *Recherche Mathématique Avancée* (Université Louis Pasteur) 32, nº 1 (2012): 95-112.

—. «Consejos a los autores de textos matemáticos. Université Louis Pasteur, Estrasburgo, Francia. .» *Lecturas Matemáticas. Volumen 25 (2004): 193-209.* 2004. http://www.scm.org.co/Articulos/757.pdf (último acceso: 01 de octubre de 2009).

Avez, Aubre. *Calcul Différentiel. Collection Maîtrise de mathématiques pures sous la direction de Dieudonné et Malliavin.* Paris: Masson, 1987.

Azcárate Giménez, Carmen, y Matías Camacho Machín. «Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis.» *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003), 135-149.* 2003. http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf (último acceso: 30 de septiembre de 2009).

Azcárate Goded, Pilar, y Ana Serradó Bayés. «Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO.» *Revista de Educación, 340. Mayo-agosto 2006, pp. 341-378.* 2006. http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340_13.pdf (último acceso: 04 de octubre de 2009).

Bagchi, Atish, y Charles Wells. «On the communication of mathematical reasoning.» *Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate. vol. 8, pages 15-27 (1998).* 1998a. http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/pdf/comlog.pdf (último acceso: 02 de octubre de 2009).

—. «On the communication of mathematical reasoning. Problems, Resources and Sigues in Matemáticas Undergraduate Studies.» *PRIMUS, Vol. 8, pp. 15-27.* 1998a. http://www.dean.usma.edu/math/resource/pubs (último acceso: 14 de julio de 2009).

—. «Varietes of mathematical prose.» *Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate. Vol. 8 (1998), pp. 116-136.* 1998b. http://www.case.edu/artsci/math/wells/pub/pdf/mathrite.pdf (último acceso: 18 de agosto de 2009).

—. «Varietes of mathematical prose.» *Problems, Resources and Sigues in Matemáticas Undergraduate Studies (PRIMUS), Vol. 8, pp. 116-137.* 1998b. http://www.case.edu/artsci/math/wells/pub/pdf/mathrite.pdf (último acceso: 15 de julio de 2009).

Balakrishnan, N, y V Nevzorov. *A Primer on Statistical Distributions.* Segunda edición. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.

Ball, Keith. *Strange Curves, Counting Rabbits, and Other Mathematical Explorations.* Segunda eedición. Princeton: Princeton University Press, 2013.

Barton, Allen. «El concepto de espacio de propiedades en la investigación social.» Cap. III de *Conceptos y variables en la investigación social*, de Francis Korn, Paul Lazarsfeld, Allen Barton y Herbert Menzel, traducido por Víctor Madueño, 50-75. Buenos Aires: Nueva visón, 1971.

Bernstein, Basil. *Class, Code and Control. Volume III. Towards a Theory of Educational Transmission.* Primera . Vol. 3. 4 vols. New York: Routledge, 2003c.

Biehler, Rolf, Roland Scholz, Rudolf Strasee, y Bernard Winkelmann. *Didactics of Mathematics as a scientific discipline.* Segunda. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Biggs, John, y Kevin Collins. *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome).* Tercera edición. NewYork: Academic Press, 2012.

Bissel, Chris, y Chris Dillon. *Ways of Thinking, Ways of Seeing. Mathematical and Other Modelling in Engineering and Technology.* Primera edición. Berlin: Springer, 2012.

Blanco Abellan, Mónica. *Hemenèutica del càlcul diferencial a l'Europa del segle xviii: de L'analyse des infiniment petits de L'Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802).* Barcelona: Universitat Autònoma d Barcelona, 2011.

—. «Hermenèutica del càlcul diferencial a l’Europa del segle XVIII: de l’Analyse des infiniment petits de L’Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802). Tesis Doctoral.» *Universitat Autònoma de Barcelona.* 2004. http://www.tesisenred.net/TDX-0130106-195028/ (último acceso: 20 de mayo de 2010).

Bloom, Benjamin, Max Engelhart, Edward Furst, Walker Hill, y Davidl Krathwoh. *Taxonomy of Educational Objectives. The Classification of Educational Goals. Handbook 1. Cognitive Domain.* Primera. London: Longamns, Green and Co., 1956.

Boas, P. «Can We Make Mathematics Intelligible?» *The American Mathematical Monthly* 88, nº 10 (1981): 727-731.

Boote, D, y P Beile. «Scholars before researches: on the centrality of the dissertation literatura review in research preparation.» *Educational researcher* xxxiv, nº 6 (2005): 3-15.

Boote, David. «Commentary 3 on Re-conceptualizing Mathematics Education as a Design Science.» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Barath Sriraman y Lyn English, 159-168. Berlin: Springer, 2010.

Borel, Émile. «La definición en matemática.» En *Le Lionnais (comp.), François Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, de François Le Lionnais (comp.), traducido por Néstor Míguez y Luis (revisión) Santaló, 25-34. Buenos Aires: Eudeba, 1976.

Bourbaki, Nicolas. «La arquitectura de las matemáticas.» En *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, de François Le Lionnais (comp.), traducido por Néstor Míguez y Luis Santaló, 26-49. Buenos Aires: Eudeba, 1976.

Boyer, Carl Benjamin, y Uta Merszbach. *A history of mathematics.* Segunda edición. Republic of Singapore: John Wiley & Sons, 1989.

Brändstrom, Anna. «Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks. An analysis of the levels of difficulty.» *Lulea University of Technology.* 2005. epubl.luth.se/1402-1757/2005/index.shtml (último acceso: 19 de Julio de 2009).

Brosseau, Guy. «Mathematics, Didactical Egineering and observation.» Editado por Hana Moraová, Magdalena Krátká, Naďa Stehlíková Jarmila Novotná. Praga: Charles University in Prague Faculty of Education, 2006a. 3-19.

Brousseau, Guy. *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Primera edición. Traducido por Dilma Fregona. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2007.

—. *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathematiques, 1970-1990.* New York: Kluwer, 2002.

Brown, George. «How students learn.» *A supplement to the Routledge-Falmer Key Guides for Efective Teaching in Higher Education series.* Editado por Routledge-Falmer. 2004. http://www.routledgefalmer.com/series/KGETHE/resource.pdf (último acceso: 11 de 10 de 2011).

Bunge, Mario. *La ciencia. Su método y su filosofía.* Segunda edición. Buenos Aires: Debolsillo, 2009.

Burgos, Juan de. *Álgebra elemental y geometría cartesiana. Tercera edición.* Tercera edición. Madrid: McGraw-Hill, 2006.

Byers, William. *How Mathematicians Think.Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics.* Segunda edición. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2012.

Canuto, Claudio, y Anita Tabacco. *Analisi matematica I. Teoria ed esercizi con complementi in rete. 2a edizione.* Segunda edición. Milano: Springer, 2005.

—. *Analisi matematica II. Teoria ed esercizi con complementi in rete.* Primera edición. Milano: Springer, 2008.

Caramalho Domingues, Joao. *Lacroix and the Calculus.* Segunda edición. Berlín: Birkhäuser, 2012.

Carlino, Paula. «¿Qué nos dicen hoy las investigaciones internacionales sobre la escritura en la universidad?» *Conferencia invitada en el I Encuentro Nacional de Discusión sobre Polítila Lectura y la Escritura en la Educación Superior. ASCUN y Red Nacional de Discusión sobre Lectura yEducación Superior. Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, 26 y 27 de abril de 2007.* 2007. http://www.ascun.org.co/eventos/lectoescritura/paulacarlino.pdf (último acceso: 24 de julio de 2010).

Carlino, Paula. «Alfabetización académica: un cambio necesario, algunas alternativas posibles.» *Educere. Investigación* 6, nº 20 (Enero-febrero-marzo 2003): 409-420.

—. «El proceso de escritura académica: cuatro dificultades de la enseñanza universitaria.» *Educere, Revista venezolana de educación 8(26), 321-327. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.* 2004.

http://saber.ula.ve/bitsream/123456789/19901/2/articulo4.pdf (último acceso: 14 de octubre de 2009).

—. *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica.* Primera edición, cuarta reimpresión. Buenos Aires: Fondo de cultura económica, 2009.

Cassirer, Ernst. *Substance and Function. And Einstein's Theory of Relativity.* Vigésima. Traducido por William Curtis Swabey y Mary Collins Sabey. Chicago: Dover, 1953.

—. *The Problem of Knowledge. Philosophy, Science and Hostory since Hegel.* Primera. Traducido por William Woglom y Charles Hendel. New York: Yale University Press, 1950.

Cavallo, Guglielmo, y Roger Chartier (Eds.). *Historia de la lectura en el mundo occidental.* Primera. Buenos Aires: Taurus, 2011.

Chartier, Anne-Marie. *Enseñar a leer y escribir. Una aproximación histórica.* Primera. Traducido por Diana Sánchez. México D. F.: Fondo de Cultura Económica, 2005.

Chartier, Anne-Marie. «La memoria y el olvido, o cómo leen los jóvenes profesores.» Cap. IV de *Sociología de la lectura*, de Bernard Lahire, traducido por Hilda García, 109-138. Barcelona: Gedisa, 2004.

Chartier, Roger. *El orden de los libros. Lectores, autores, bibliotecas en Europa entre los siglos XIV y XVIII.* Tercera edición [Original 1992, L' ordre des livres. Lecteurs, auteurs, biblithèques en Europe entre XIV et XVII siècle]. Traducido por Virginia Ackerman. Barcelona: Gedisa, 2005b.

—. *Inscribir y borrar. Cultura escrita y literatura (siglos XI-XVIII).* Primera edición [Original 2005, Inscrire et effacer]. Traducido por Víctor Goldstein. Buenos Aires: Katz, 2006.

Chartier, Roger. «Las revoluciones de la lectura: siglos XV-XX.» *Revista de Humanidades: Tecnológico Monterrey* 1, nº 007 (1999): 91-110.

Chartier, Roger. «Lecturas y lectores 'populares' del renacimiento hasta la época clásica.» En *Historia de la lectura en el mundo occidental*, de Guglielmo Cavallo y Roger Chartier, editado por Chartier, Roger Guglielmo Cavalllo, traducido por María Barberán, Mari Palomero, Fernando Borrajo y Cristina García Ohlrich, 335-352. Buenos Aires: Taurus, 2011b.

—. *Pluma de ganso, libro de letras, ojo viajero.* Primera edición, primera reimpresión. Traducido por Alejandro Pescador. México D.F.: Universidad Iberoamericana, 2005c.

Chevallard, Yves. «La TAD face au professeur de mathématiques.» 2009c. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162 (último acceso: 11 de 04 de 2012).

Chevallard, Yves. «L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.» *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19, nº 2 (1999b): 221-266.

—. «Les mathématiques dans les formations universitaires : un schéma alternatif.» Editado por Mathématiques et sciences humaines de la Faculté des sciences de Luminy (Université de la Méditerranée). Luminy: Mathématiques et sciences humaines de la Faculté des sciences de Luminy (Université de la Méditerranée), 2002b.

Chin, Erh-Tsung. «Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking.» *Department of Mathematics, National Taiwan Normal University*.

2011. http://www.lettredelapreuve.it/PME/PME27/RR_chin.pdf (último acceso: 03 de 10 de 2011).
Chin, Erh-Tsung, y David Tall. *Developing formal mathematical concepts over time.* Vol. IV, de *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, editado por Marja van den Heuvel-Pabhuizen (Ed.), 241-248. Ultrech: Utrecht University, 2001.
Chin, Erh-Tsung, y David Tall. *University students embodiment of quantifie.* Vol. IV, de *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, editado por Anne Cockburn y Elena Nardi (eds.), 273-280. Norwich: Norwich University, 2002.
Churchill, Ruel, y James Ward Brown. *Variable compleja y sus aplicaciones.* Cuarta edición en español. [Original 1984, Complex variable and applications, fourth edition]. Traducido por Luis Martínez Alonso. Naucalpán de Juárez: McGraw-Hill, 1990.
Cohen, Jacob. «A coefficient of agreement for nominal scales.» *Educational and Psychological Measurement* 20, nº 1 (1960): 37-46.
Cohen, Morris, y Ernest Nagel. *Introducción a la lógica y al método científico II. Lógica aplicada y método científico.* Primera edición en castellano. Décima reimpresión. Traducido por Néstor A. Míguez. Vol. II. 2 vols. Buenos Aires: Amorrortu, 2000b.
—. *Introducción a la lógica y el método científico I. Lógica formal.* Primera edición en castellano. Novena reimpresión. Traducido por Néstor A. Míguez. Vol. I. 2 vols. Buenos Aires: Amorrortu, 2000a.
Colley, Susan. *Vector Calculus. Fourth Edition.* Cuarta edición. Boston: Pearson, 2012.
Concari, Sonia Beatriz, y Silvia María Giorgi. «Los problemas resueltos en textos universitarios de física.» *Enseñanza de las Ciencias* 18, nº 3 (2000): 381-390.
Courant, Richard, y Fritz John. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 2.* Novena edición. Traducido por Hernán Pérez Castellanos. Vol. II. 2 vols. México D. F.: Limusa, 1999b.
—. *Introduction at Calculus and Analysis. Volume two.* Primera edición. Vol. II. 2 vols. New York: Wiley & Sons, 1974.
Csiszár, Imre. *Information Theory and Statistics: A Tutorial.* Primera edición. Boston: Now, 2004.
Dahan-Dalmedico, Amy, y Jean Pfeiffer. *Une histoire des mathématiques. Routes y dédales.* Segunda. Paris: Seuil, 1986.
Davis, Richard. «The interplay of Algebra, Geometry and Logic.» *Journal of Mathematical Behaviour* 7, nº 7 (1988): 9-28.
Derrick, William. *Variable compleja con aplicaciones.* Primera edición en español [Original 1984, Complex Analysis and Applications]. Traducido por Marco Antonio Rosales. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.
Devore, Jay, y Kenneth Berk. *Modern Mathematical Statistics with Applications.* Segunda edición. New York: Springer, 2012.
D'Hombres, Jean. «French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy.» *Historia Scientarum* 28, nº 2 (1984): 91-137.
Diestel, Reinhardt. *Graph Theory.* Quinta edición. New York: Springer, 2012.
Dieudonné, Jean, Paul Halmos, Steenrod N, y M. Schiffer. «How to Write Mathematics.» *American Mathematical Society, Vol.4, Nº5.* 1975. http://www.stat.ualberta.ca/~wiens/trent_write.pdf (último acceso: 10 de mayo de 2010).

Dorier, Jean Luc. «Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire. Perspectives théorique sur leurs interactions.» *Laboratoire Leibniz-IMAG, 46 av. Félix Viallet, 38000 Grenoble, France - n° 12.* 2000. http:// www-leibniz.imag.fr/LesCahiers (último acceso: 15 de octubre de 2008).

Dormolen, Jean. «Textual analysis.» En *Perspectives on mathematicla education.*, de B. Christiansen, Howson A. y M. Otte, 141-171. Dordrecht: Reidel, 1986.

Dress, François. *Les Probabilités et la Statisque.* Segunda edición. Paris: Dunod, 2013.

Dreyfus, Tommy. «Advanced mathematical thinking processes.» Cap. II de *Advanced mathematical thinking*, de David Tall, 25-41. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1991.

Dreyfus, Tommy, Baruch Schwarz, y Rina Hershkowitz. *Transformation of Knowledge Through Classroom Interaction.* Primera. London: Routledge, 2009.

Dubinsky, Ed. «A learning theory approach to calculus.» En *Symbolic computation in undergraduate mathematics education*, de Z Karian, editado por Z Karian, 43 – 55. Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1992.

Dubinsky, Ed. *Reflective abstraction in the advanced mathemmaticall thinking.* Vol. VII, de *Advanced mathematical thinking*, de David Tall, 95-124. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1991.

Dubinsky, Ed, y David Tall. «Advanced mathematical thinking and the computer.» Cap. XIV de *Advanced mathematical thinking*, de David Tall, 231-242. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1991.

Dubinsky, Ed, y Keith Schwingendorf. «Constructing calculus concepts: cooperation in a computer laboratory.» En *MAA Notes Series.* Mathematical Association of America, 1990.

Dubinsky, Ed, y Michael McDonald. «APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research.» ****, 2000.

Duffin, Janet, y Adrian Simpson. «Natural, conflicting, and alien.» *Journal of Mathematical Behaviour* 12, nº 1 (1993): 313-328.

Duval, Raymond. *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en matemática educativa.* Primera edicón. Máxico, D. F.: Grupo editorial Iberoamérica, 1998.

Edelaman, Gerard. *The Remembered Present.* Primera. New York: Basic Books, 1989.

Edelman, Gerard. *Bright Air, Brilliant Fire.* Primera. New York: Basic Books, 1994.

—. *Neural Darwinism.* Primera. New York: Basic Books, 1987.

Eisenberg, Thomas. «Functions and associated learning difficulties.» Cap. IX de *Advanced mathematical thinking*, de David Tall, 140-152. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1991.

English, Lyn, y Bharath Sriraman. «Problem Solving for the 21st Century.» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Bharath Sriraman y Lyn English, 263-290. Berlin: Springer, 2010.

Epp, Susanna. «The Role of Logic in Teaching Proof.» *The American Mathematical Monthly* (Mathematical Association of America) 110, nº 10 (Diciembre 2003): 886-899.

Ferrater Mora, José. *Diccionario de filosofía. Tomo I [A-D]*. Primera edición revisada, aumentada y actualizada por Josep-María Terricabra. Tercera reimpresión supervisada por Priscilla Cohn Ferrater Mora. Vol. I. 4 vols. Barcelona: Ariel, 2004a.

Fiemberg, Stephen. *The Analysis of Cross-Classified Categorical Data.* Segunda edición. New York: Springer, 2007.

Fleiss, Joseph. «Measuring nominal scale agreement among many raters vol. 76, no. 5 pp. 378–382.» *Psychological bulletin* 76, nº 5 (1971): 378-382.

Fodor, Jerry, Merrill Garret, Edwards Walker, y C Parley. «Against Definition.» *Cognition* 8 (1980): 263-267.

Freeman, Donald, y Andrew Porter. «Do Textbooks Dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools?» *American Educational Research Journa* 26, nº 3 (1989): 403-421.

Freund, Rudolf, y Williams Wilson. *Statistical Methods.* Tercera edición. San Diego, California: Elsevier, 2013.

Galtung, Johan. *Teoría y métodos de la investigación social.* Quinta edición. Traducido por Edmundo Fuenzalida Faivovich. Vol. I. II vols. Buenos Aires: Eudeba, 1978.

Gascón, Josep. «From the Cognitive Program to the Epistemological Program in didactics of mathematics. Two incommesurable scientific research programs?.» *For the learning of mathematics* 23, nº 2 (2003b): 44-55.

Gatabi, Abolfazl, y Kaye Stacey. «Applyying a mathematical literacy framework to the irani grade 9 mathematics textbooks.» En *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Marianna Tzekaki, María Kaldrimidou y Haralambos Sakonidis (Eds.), 433-440. Tesalónica, Grecia: Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009.

Ghorphade, Sudhir, y Balmohan Limaye. *A Course of Calculus and Analysis Real. With 71 figures.* Primera edicón. New York: Springer, 2006.

Giaquinto, Marcus. *Visual Thinking in Mathematics. An epistemological study.* Primera. Oxford: Oxford University Press, 2007.

Gierl, Mark. «Comparing cognitive representations of test developers and students on a mathematics test with Bloom's taxonomy.» *The Journal of Educational Research* 91, nº 2 (1997): 26-32.

Giusti, Enrico. *Analisi Matematica 1.* Segunda. Torino: Bollati Boringhieri, 1996.

Golumbic, Martin, y Irith Harman. *Graph theory, combinatorics, and algorithms. Interdisciplinary Applications.* New York: Springer, 2012.

González Astudillo, María Teresa. *Sistemas simbólicos de representación en el aprendizaje del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos. Tesis Doctoral.* Primera. Salamanca: Universidad de Salamanca Publicaciones, 2002.

González Astudillo, María Teresa, y Modesto Sierra Vázquez. «Metodología de análisis de libros de texto de matemática. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX.» *Enseñanza de las ciencias* 22, nº 3 (2004): 389-408.

Gopen, David, y David Smith. «What's an Assignment Like You Doing in a Course Like This?: Writing to Learn.» *The College Mathematics Journal* (Mathematical Association of America) 21, nº 1 (Enero 1990): 2-19.

Gopen, George. «Perceiving structure.» *Harvard Law School Bulletin*, 2010: 27-29.

Gordon, Sue. «Opportunities for Learning – A Self-Study of Teaching Statistics in a Mathematics Learning Centre.» En *What Counts in Teaching Mathematics. Adding Value to Self and Content*, de Sandy Schuck y Peter Pereira, 127-145. Dordrecht: Springer, 2011.

Gray, Eddie, Marcia Pinto, Demetra Pitta, y David Tall. «Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics.» *Educational Studies in Mathematics* 38, nº 1 (1999): 111-133.

Gray, Eddie, y David Tall. «Abstraction as a natural process of mental compression.» *Mathematics Education Research Journal* 19, nº 2 (2007): 23-40.

Gray, Robert. *Entropy and Information Theory.* Segunda edición. New York: Springer, 2011.

Hairer, Ernst, y G. Wanner. *Analysis by its History.* Primera edición. New York: Spinger-Verlag, 1996.

Halmos, Paul. «How to write mathematics.» Cap. 2 de *How to write mathematics,* de Norman Steenrod, Paul Halmos, Menahem Schiffer y Jean Dieudonné, 19-48. New York: American Mathemmatical Society, 2012.

Hankerson, Darrel, Greg Harris, y Peter Johnson. *Introduction to Information Theory and Data Compression.* Segunda edición. Boca Raton: CRC Press, 2003.

Harel, Gershon. «Problem Solving for the 21st Century.» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Bharath Sriraman y Lyn English, 343-367. Berlin: Springer, 2010a.

Harel, Guershon, y David Tall. «The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics.» *For the Learning of Mathematics* 11, nº 1 (1989): 38-42.

Harmon, Kara. «Textbook Analysis and Vision for Future Mathematics Curricula.» *University of Illinois at Urbana-Campaign.* 2010. http://www.mste.uiuc.edu/courses/ci4312p02/student/kharmon/kharmonPAPER1.doc (último acceso: 12 de junio de 2010).

Haswell, R., T. Briggs, J. Fay, R. Gillen, A. Shupala, y S. Trevino. «Context and Rhetorical Reading Strategies.» *Written Communication* 16, nº 1 (1999): 3-27.

Henning, T. B. «Literature Review: Synthesizing Mulpiple Sources (Handout).» *Indiana University-Purdue University Indianapolis (IUPUI) University Writing Center "Because writers need readers".* 1999. http://www.iupui.edu/~uwc/pdf/Literature%20Review%20and%20Synthesis%20Feb%2003.pdf (último acceso: 20 de octubre de 2009).

Henningsen, Mrjorie, y Marie Kay Stein. «Mathematical task and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning.» *Journal for Research in Mathematics Education* 28, nº 5 (1997): 524-549.

Herbst, Patricio. «Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century.» *Educational Studies in Mathematics* 49 (2002): 283-312.

Hoffman, Kenneth, y Ray Kunze. *Álgebra lineal.* Segunda edición. Traducido por Hugo Finsterbusch. México D. F.: Prentice Hall, 1991.

—. *Linear Algebra.* Segunda edición. New Jersey: Prentice Hall, 1990.

Hogdson, Bernard. « The Mathematical Education of School Teachers: Role and Responsabilities of University Mathematicians.» En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, de Derek Holton (ed.), 501-518. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2012.

Holton (ed.), Derek. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study.* Segunda edición. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2012.

Houston, Kevin. *How to Think Like a Mathematician. A Companion to Undergraduate Mathematics.* Primera edición. New York: Cambridge University Press, 2012.

Inglis, Matthew, y Lara Alcock. «Expert and Novice Approaches to Reading Mathematical Proofs.» *Journal for Research in Mathematics Education* 43, nº 4 (2012): 358-390.

Johansson, Monica. «Mathematics textbooks – the link between the intended and the implemented curriculum? The Mathematics Education into the 21st Century Project.» *Universiti Teknologi Malaysia. Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education.* 2005. http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_malasya_Johansson119-123_05.pdf (último acceso: 20 de junio de 2009).

—. «Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum (Licentiate thesis).» *Luleå: Department of Mathematics, Luleå University of Technology.* 2003. http://epubl.ltu.se/1402-1757/2003/65/index.html (último acceso: 6 de junio de 2009).

Johsua, Samuel, y Jean Jacques Dupin. *Introducción a la didáctica de las ciencias y de la matemática.* Primera edición. Traducido por Ana Beatriz Narvaja y Nancy Roggier. Buenos Aires: Colihue, 2005a.

Kant, Immanuel. *Critique of Pure Reason.* Tecera. Traducido por Paul Guyer y Allen Wood. New York: Cambridge University Press, 2000.

—. *Lógica.* Primera edición. Traducido por Carlos Correas. Buenos Aires: Corregidor, 2010.

Katz, Mikhail, y David Tall. «Tension between Intuitive Infinitesimals and Formal Mathematical Analysis.» *Cornell University Library*. 2011. http://arxiv.org/abs/1110.5747v1 (último acceso: 12 de 10 de 2011).

Katz, Mikhail, y David Tall. «The Tension between Intuitive Infinitesimals and Formal Mathematical Analysis.» En *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*, de Bharath Sriraman, 71-90. Cambridge: Cambridge Press, 2012b.

Kessel, Cathy, y Lipping Ma. «Mathematicians and the preparation of elementary teachers.» En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, de Derek Holton (ed.), 467-480. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2012.

Khinchin, A. *Mathematical foundations of information theory.* Primera edición. Traducido por R Silverman y M Friedman. New York: Dover, 1957.

Kieran (eds.), Carolyn, Forman Ellice, y Anna Sfard. *Learning Discourse. Discursive approaches to research in mathematics education.* Segunda. Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

Kinard, James, y Alex Kozulin. *RigorousMathematical Thinking .Conceptual Formation in the Mathematics Classroom.* Primera. Cambridge: Cambridge Univesity Press, 2008.

Klimovsky, Gregorio. *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología.* Primera edición. Buenos Aires: AZ, 1994.

Klimovsky, Gregorio, y Guillermo Boido. *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción.* Primera edición. Buenos Aires: AZeditora, 2005.

Kline, Morris. *Why The Professor Can't Teach. Mathematics and the Dilemma of University Education.* Primera edición. New York: Saint Martin's Press, 2012.

—. *Why The Professor Can't Teach. Mathematics and the Dilemma of University Education.* Primera. New York: Saint Martin's Press, 1977.

Knipping, Christine. «Challenges in teaching mathematical reasoning and proofs. Introduction.» *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 36, nº 5 (2004): 127-128.

Knipping, Christine. «Learning from comparing. A review and reflection on qualitative oriented comparisons of teaching and learning mathematics in different countries.» *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 35, nº 6 (2003): 282-293.

Kolmogorov, A. N., y S. V. Fomin. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Segunda edición. Traducido por Carlos Vega. Moscú: Mir, 1975.

Korn, Francis, Paul Lazarsfeld, Allen Barton, y Herbert Menzel. *Conceptos y variables en la investigación social.* Primera edición. Tercera reimpresión. Buenos Aires: Nueva Visión, 1971.

Kostrikin, Alexei, y Yuri Manin. *Linaer Algebra and Geometry.* Primera. Traducido por M. Alferieff. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 1997.

Koyré, Alexandre. *Introducción a la lectura de Platón.* Primera [Original 1945, Discovering Plato]. Traducido por Víctor Sánchez de Zavala. Madird: Alianza, 1996.

Krasnov, Mijáil, Alexandr Kiseliov, y Grigori Makárenko. *Análisis Vectorial.* TerSegundacera Edición. Traducido por Tina Shapoválova. Moscú: Mir, 1989.

Krathwohl, David. «A revision of Bloom's taxonomy: An overview.» *Theory Into Learning* 41, nº 4 (2001): 212-218.

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics.* Séptima edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1993.

Krippendorff, Klaus. *Information Theory. Structural models for qualitative data.* Tercera edición. London: Sage, 2012.

—. *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Traducido por Leandro Wolfson. Barcelona: Paidós, 1990.

Kudriávtsev, L. D. *Curso de análisis matemático. Tomo II.* Primera edición. Traducido por Vicente Fernández. Vol. II. 2 vols. Moscú: Mir, 1984.

Kuhn, Thomas. *La estructura de las revoluciones científicas.* Primera edición. Novena reimpresión. [Original 1962: The structure of scientific revolutions]. Traducido por Agustín Contin. Buenos Aires: Fondo de cultura económica, 2006.

Kulm, Gerald. «Making sure your mathematics curriculum meets standards.» *Mathematics Teaching in the Middle School* 48, nº 8 (1999): 536-541.

Kulm, Gerald, JoElle Roseman, y Michelle Treistman. «A benchmarks-based approach to textbook evaluation.» *Science Books & Films* 35, nº 4 (1999): 147-153.

Kulm, Gerald, y Roberts Curtis. «Rating Algebra Textbooks. Texas A&M University.» 2000. http://www.coe.tamu.edu/~gkulm/Rating_Alg_Text(NCTM).pdf (último acceso: 13 de 02 de 2012).

Lacués Apud, E, y J Peña Brussone. « La lectura de textos matemáticos como tarea para promover la inserción del estudiante en el medio universitario .» *Universidad Católica de Uruguay.* 2006. www.fio.unam.edu.ar/emci/com (último acceso: 11 de 04 de 2012).

Lamport, Leslie. «How to Write a Proof.» *Systems Research Center of Digital Equipment Corporation in Palo Alto, California.* 1993. http://research.microsoft.com/users/lamport/pubs/lamport-how-to-write.pdf (último acceso: 03 de 10 de 2011).

Landis, J, y G Koch. «The measurement of observer agreement for categorical data.» *Biometrics* 33, nº 1 (1977): 159-174.

Lang, Serge. *A First Course of Calculus.* Tercera. New York: Springer, 1984.

Lay, David. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Tercera edición en castellano actualizada [Original 2006: Linear Algebra and its applications]. Traducido por Jesús Elmer Murrieta Murrieta. México D. F.: Pearson, 2007.

Le Lionnais (comp.), François. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Tercera edición. Traducido por Néstor Míguez. Buenos Aires: Eudeba, 1976.

Lehmann, Daniel, y Rudolphe Bkouche. *Initiation à la géométrie.* Primera edición. París: Presses Universitaires de France, 1988.

Leikin, Rosa, y Rina Zazkis. «Exemplifyng definition: on the field-related caracter of teacher's content knowledge.» En *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Marianna Tzekaki, María Kaldrimidou y Haralambos Sakonidis (Eds.), 1-8. Tesalónica, Grecia: Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009.

Leonesi, Sandro, y Claudio Toffalori. *Un invitto all'Algebra.* Primera. Milano: Springer, 2006.

Leray, Christian. *L'Analyse de contenu. De la Thèorie á la pratique. La mèthode Morin-Chartier.* Québec: Press de l'Université de Québec, 2008.

Lerman, Stephen. *Theories of Mathematics Education: A Problem of Plurality?* Vol. 1, de *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Helen Chick y Jill Vincent, 179-183. Melbourne: University of Melbourne, 2005.

Lerman, Stephen. *Theories of Mathematics Education: A Problem of Plurality?* Vol. 1, de *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Helen Chick y Jill Vincent, 179-183. Melbourne: University of Melbourne, 2005.

Lerman, Stephen. «Theories of Mathematics Education: Is Plurality a Problem?» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Bharath Sriraman y English Lyn, 99-110. New York: Springer, 2010.

Lesh, Richard, Eric Hamilton, y James Kaput. *Foundations for the Future in Mthematics Education.* Segunda edición. mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2012.

Lesh, Richard, y Barath Sriraman. «Re-conceptualizing Mathematics Education as a Design Science.» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Barath Sriraman y Lyn English, 123-146. Berlin: Springer, 2010.

Lester, F., y D.. Lamdbin. «The ship of Theseus and other metaphors for thinking about what we value in mathematics education research.» En *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, de Jane Kilpatrick y Sierpinska (Eds.) Anna. Dordretch: Kluwer, 1998.

Li, Wei. *Mathematical Logic Foundations for Information Science.* Primera edición. Berlín: Birkhäuser, 2010.

Lovric, Miroslav. «Mathematics Textbooks and Promotion of Conceptual Understanding.» 2006. www.math.mcmaster.ca/lovric/courses/Lovric_Texts_Fields.pdf (último acceso: 5 de 3 de 2012).

Lowe, Edgard, y David Pimm. «'This is so': a text on texts.» En *International Handbook of Mathematics Education*, editado por Bishop et al., 371-409. Dordretch: Kluwer Academic, 1996.

Malaver, Manuel, Rafael Pujol, y Antonio D'Alessandro Martínez. «Los estilos de prosa y el enfoque ciencia-tecnología-sociedad en textos universitarios de química general.» *Enseñanza de las Ciencias* (Universidad Pedagógica Experimental Libertador) 22, nº 3 (2004): 441-454.

Marsden, Jerrold E., y Anthony J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López

Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

Marsden, Jerrold, y Anthony Tromba. *Vector Calculus.* Quinta edición. New York: Freeman and Company, 2003.

Martin (Ed.), Michael, y David Kelly. *Third International Mathematics and Science Study: An Overview.* Primera. Boston: Boston College Press., 2008.

Mason, John, y Sue Johnston-Wilder. *Fundamental Constructs in Mathematics Education.* Primera. London: RoutledgeFalmer, 2004.

Mateos, Mar. «Aprender a leer textos académicos: más allá de la lectura reproductiva.» Cap. VI de *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*, de Juan Ignacio Pozo y María Puy Pérez Echeverría, 106-119. Madrid: Morata, 2009.

Maxwell, Joseph. «Literature reviews of, and for, Eduactional Research: A Comentary on Boote and Beile's "Scholars Before Researchers".» *Educational Researcher* 35, nº 9 (2006): 28=31.

Méray, Charles. *Nouveau Précis d'analyse infinitésimale.* Paris: Savy, 1872.

Meyer, Paul. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas. Edición revisada.* Primera edición revisada. Traducido por Carlos Prado Campos, Germán Ardila Cuéllar, Segio Octavio Esparza y Raúl Montes de Oca. Wilmington, Delaware, EUA: Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.

Mitchelmore, Michael, y Paul White. «Abstraction in Mathematics Learning.» *Mathematics Education Research Journal* 19, nº 2 (2007): 1-9 .

Mitchelmore, Michael, y Paul White. *Abstractions in Mathematics and Mathematics Learning.* Vol. 3, de *The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, editado por Bergen University College, 329-336. Bergen, Norway: Bergen University College, 2004.

Moreau, Joseph. *Aristóteles y su escuela.* Primera edición. Traducido por Mariano Ayerra. Buenos Aires: Eudeba, 1993.

Morgan, Candia. *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation.* Cuarta edición. London: Palmer Press, 2012.

Mouzakitis, Aristides. «Comparative analysis of Italian and greek Euclidean Geometry textbooks: a case study.» *Philosophy of Mathematics Education Journal No. 19 (December 2006).* Editado por Paul Ernest. 2006. http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome19/index.htm (último acceso: 27 de julio de 2009).

Muller, Eric. «reflections of the sustained use of technology in undergraduate mathematics education.» En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, de Derek Holton (ed.), 381-394. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Muller, Eric. «reflections of the sustained use of technology in undergraduate mathematics education.» En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, de Derek Holton (ed.), 381-394. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2012.

Naftaliev, Elena, y Michal Yerushalmy. «Interactive Diagrams: alternative practices for the design of algebra inquiry.» En *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Marianna Tzekaki, María Kaldrimidou y Haralambos Sakonidis (Eds.), 185-192. Tesalónica, Grecia: Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009.

Nardi, Elena. *Amongst Mathematicians. Teaching and Learning Mathematics at University Level.* Segunda edición. New York: Springer, 2012.

Nardi, Elena, y Paola Iannone. *How to Probe It: A brief guide for teaching Proof to Year 1 mathematics undergraduates.* Primera edición. London: University of East Anglia Press, 2013.

Neuendorf, Kimberly. *The Content Analysis Guidebook.* Segunda edición. Thousand Oaks, California: Sage, 2012.

Nicol, Cynthia. «Growing Possibilities: Designing Mathematical and Pedagogical Problems Using Variation.» En *What Counts in Teaching Mathematics. Adding Value to Self and Content*, de Sandy Schuck y Peter Pereira, 45-60. Dordrecht: Springer, 2011.

Paivio, Allan. *Imagery and verbal processing.* Primera. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1971.

—. *Mental represetations: a dual-coding aproach.* Primera. Oxford: OUP, 1986.

Panaoura, Areti, Athanasios Gagatsis, Eleni Deliyianni, y Iliada Elia. «Affevtive and cognitive factors on the use of reprsentations in the learning of fractions and decimals.» En *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Marianna Tzekaki, María Kaldrimidou y Haralambos Sakonidis (Eds.), 273-280. Tesalónica, Grecia: Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009.

Papoulis, Athanasios. *Probability & statistics.* Primera edición. . New Jersey: Prentice Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster, 1990.

Parsons, Charles. *Mathematical Thought and Its Objects.* Segunda edición. New York: Cambridge University Press, 2013.

—. *Mathematical Thought and Its Objects.* Primera. New York: Cambridge University Press, 2008.

Peláez Cedrés, Álvaro. *Lo 'a priori' constitutivo: historia y prospectiva.* Primera edición. Rubí (Barcelona): Abthropos, 2008.

Penrose, Roger. «Mathematics, the mind, and the physical world.» En *Meaning in Mathematics*, de John Polkinghorne, 41-45. Oxford: Oxford University Press, 2011.

Pepin, Birgit. «Epistemologies, beliefs and concepcions of mathematics teaching and learnings: the theory, and wath is manifested in mathematics teachers' works in England, France and Germany.» *Centre for research and Development in Teacher Education, School of Education, The Open Univerity.* 2007. http://tnteee.umu.se/lisboa/papers/full-papers/pdf/e3-pepin.pdf (último acceso: 22 de junio de 2009).

Pepin, Birgit, y Linda Haggerty. «Mathematics textbooks and their use for theachers: a window into the education world of particular countries.» Cap. VI de *Curriculum landscapes and trends*, de Jan van den Akker, Wilmard Kuiper y Uwer Hameyer, 73-100. Dordretch: Kluwer academic publishers, 2003.

Piaget, Jean. *La psicología de la inteligencia.* Segunda edición. Traducido por Juan Carlos Foix. Barcelona: Crítica, 2003.

Pierce, John. *An Introduction to Information Theory. Símbolos, señales y ruidos.* Segunda edición revisada. New York: Dover, 1980.

Pinto, Marcia. «Students' Understanding of Real Analysis. Doctoral Disertation.» *Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.* 1998. www.warwick.ac.uk (último acceso: 4 de 3 de 2012).

Pinto, Marcia, y David Tall. «Student teachers conceptions of the rational numbers.» En *Proceedings of XX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 139-146. Valencia: PME Press XX, 1996.

Piskunov, N. *Cálculo Diferencial e Integral. Tomo I.* Tercera. Moscú: Mir, 1977a.

—. *Cálculo Diferencial e Integral. Tomo II.* Tercera. Moscú: Mir, 1977b.

Pita Ruiz, Claudio. *Cálculo Vectorial.* Primera edición. Naucalpán de Juárez: Prentice Hall Hispanoamericana, 1995.

Poincaré, Henri. *Science and Hypothesis.* Primera. New York: The Walter Scott Publishing, 1905.

Polkinghorne (Ed.), John. *Meaning in Mathematics.* Priemra. Oxford: Oxford University Press, 2011.

Poole, David. *Álgebra lineal. Una introducción moderna.* Primera edición en castellano [Original 2003: Linear Algebra. A Modern Introduction]. Traducido por Miguel Efrén Alatorre. México D. F.: Thomson, 2004.

Popper, Karl. *La lógica de la investigación científica.* Primera edición. Novena reimpresión. Traducido por Víctor Sánchez de Zaval. Madrid: Tecnos, 1994.

Postnikov, M. *Leçons de géométrie. Algèbre linéaire et géométrie différentielle.* Primera edición en francés, primera reimpresión. Traducido por Irina Pétrova. Moscú: Mir, 1988.

Poulain, Martine. «Entre preocupaciones sociales e investigación científica: el desarrollo de las sociología de la lectura en Francia en el siglo XX.» Cap. I de *Sociología de la lectura*, de Bernard Lahire, traducido por Hilda García, 17-58. Barcelon: Gedisa, 2004.

Pressley, Andrew. *Elementary differential geometry.* Primera edición. New York: Springer, 2000.

Queneau, Raymond. *Bords.* Segunda edición. Paris: Hermann, 1978.

Rabuffetti, Hebe. *Introducción al análisis matemático. (Cálculo 2).* Cuarta edición. Buenos Aires: El Ateneo, 1991.

Randolph, Justus. «Free-marginal multirater kappa: An alternative to Fleiss' fixed-marginal multirater kappa.» Editado por Joensuu University Learning and Instruction Symposium 2005. Joensuu (Finland), 2005.

Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Anális Matemático III. Análisis funcional y aplicaciones.* Tercera edición. Vol. III. 3 vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1965.

—. *Análisis Matemático I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable.* Octava edición. Vol. I. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1969.

—. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.* Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.

—. *Análisis Matemático III. Análisis funcional y aplicaciones.* Tercera edición. Vol. III. 3 vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1965.

Reys, Roberts, Barbara Reys, Richard Lapan, Gregory Holliday, y Deanna Wasman. «Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement.» *Journal for Research in Mathematics Education* 34, nº 1 (2003): 74-95.

Rezat, Sebastian. *A Model of Textbook Use.* Vol. 4, de *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Jarmila Novotná, Hana Moraová, Magdalena Krátká y Naďa Stehlíková, 409-416. Praga: Charles University in Prague. Faculty of Education, 2006.

Rezat, Sebastian. *Learning Mathematics with Textbooks.* Vol. 4, de *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, de Olimpia Figueras (Eds.), Cortina José Luia, Silvia Alatorre, Teresa Rojano y Armando Sepúlveda, 177-184. México: Cinvestav-UMSNH, 2008.
Ríbnikov, Kastov. *Historia de las matemáticas.* Primera edición. Primera reimpresión. Traducido por Concepción Valdés Castro. Moscú: Mir, 1991.
Rizvi, Nusrat. «Student's constructionn for a non-routine question.» En *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Marianna Tzekaki, María Kaldrimidou y Haralambos Sakonidis (Eds.), 481-488. Tesalónica, Grecia: Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009.
Rojo, Armando. *Álgebra II.* Decimotercera. Buenos Aires: El Ateneo, 1995.
Rovenski, Vladimir. *Modeling of Curves and Surfaces with Matlab.* Primera. New York: Springer, 2010.
Rudin, Walter. *Principios del Análsis Matemático.* Tercera. Traducido por Miguel Irán Alcerreca Sánchez. Máxico D.F.: McGraw-Hill, 1980.
—. *Real and Complex Analysis.* Tercera. Singapur: McGraw-Hill, 1987.
Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía de la matemática.* Primera edición. Barcelona: Paidós ibérica, 1988.
Salas, Hille, y Etgen. *Calculus. Una y varias variables. Volumne II.* Primera edición. Priemra reimpresión [Original 1999, Calculus. One and Several Variables]. Traducido por Santiago Carrillo Menéndez. Barcelona: Reverté, 2005.
Santaló, Luis. *Vectores y tensores con sus aplicaciones.* Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.
Schmidt, William, Senta Raizen, Edward Britton, Leonard Bianchi, y Richard Wolfe. *Many Visions, Many Aims. Volume 2. A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Science.* Primera. New York: Kluwer Academic, 2002.
Schubring, G. «On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author.» *For the Learning of Mathematics* 7, nº 3 (1987): 41-51.
Schubring, Gert. *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany.* Segunda. New York: Springer, 2012.
Schwarz, Baruch, Tommy Dreyfus, y Rina Hershkowitz. *Transformation of Knowledge Through Classroom Interaction.* Segunda edición. London: Routledge, 2011.
Scott, William. «Reliability of content analysis: The case of nominal scale coding.» *Public Opinion Quarterly* 19, nº 3 (1955): 321-325.
Seguin, Roger. *The elaboration of school textbooks: methodological guide.* Tercera. Paris: Unesco, 2012.
Sfard, Anna. «On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.» *Educational Studies in Mathematics* 22, nº 2 (1991): 1-36.
—. *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing.* Primera. New York: Cambridge University Press, 2008.
Sfard, Anna. «Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited.» *Proceedings of XIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* 3 (1989): 151-158.
Sfard, Anna, y L Linchevsky. «The gains and pitfalls of reification–the case of algebra.» *Educational Studies in Mathematics* 26, nº 1 (1994): 191-228.

Sierpinska, A., y S. Lerman. «Epistemologies of mathematics and of mathematics education.» En *International handbook of mathematics education*, editado por A.J. et al. Bishop, 827-876. Dordrecht: Kluwer, 1996.
Sim, J, y C Wright. «The kappa statistic in reliability studies: use, interpretation, and sample size requirements.» *Phisical Ther* 85, nº 3 (2005): 206-282.
Simmons, George. *Cálculo com Geometria Analítica.* Segunda. San Pablo: McGraw-Hill, 2011.
Sinclair, Nathalie. «Knowing More ThanWe Can Tell.» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Bharath Sriraman y Lyn English, 595-612. Berlin: Springer, 2010.
Skemp, Richard. «Relational understanding and instrumental understanding.» Editado por The National Council of Teachers of Mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2 (Septiembre 2006): 88-95.
Smith Schwan, Margaret, y Mary Kay Stein. «Selecting and creating mathematical tasks: From research to practise.» *Mathematics Teaching in the Middle School* 3, nº 5 (1998): 344-350.
Sobolev, V., y L. Lusternik. *Précis d'analyse fonctionelle.* Primera edición. Moscú: Mir Éditions, 1989.
Solomon, Yvette. *Mathematical Literacy. Developing Identities of Inclusion.* Primera edición. New York: Routledge, 2009.
Spivak, Michael. *Cálculo en Variedades.* Segunda. Traducido por Griselda Pascual Xufré. Barcelona: Reverté, 1988.
—. *Calculus.* Tercera. Houston: Perish, 1994.
Sriraman, Bharath, y Lyn English. «Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education.» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Bharath Sriraman y English Lyn, 7-28. New York: Springer, 2010.
Sriraman, Bharath, y Lyn English. «Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education.» En *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, de Bharath Sriraman y Lyn English, 7-28. New York: Springer, 2010.
Steenrod, Norman, Paul Halmos, Menahem Schiffer, y Jean Dieudonné. *How to write mathematics.* Tercera edición. New York: America Mathematical Society, 1975.
Stein, Mary Kay, y Margaret Smith Schwan. «Mathematical task as a framework for re?ection: From research to practice.» *Teaching in the Middle School Mathematics* 3, nº 4 (1998): 268-275.
Stewart, James. *Cálculo multivariable.* Cuarta edición. Traducido por José Romo. Bogotá: Thomson Learning, 2008.
Strang, Gilbert. *Calculus.* Sexta edición. Massachussets: Wellesely-Cambridge Press, 2009.
Tall, David. *A Sensible approach to the Calculus.* 2011. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/ (último acceso: 10 de 12 de 2011).
—. *Advanced mathematical thinking.* Primera edición. Dordrecht: kluwer Academic Publishers, 1991a.
—. «Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism.» *University of Warwick. Paper for the ICMI Conference on Proof, May 2009, Taipei.* 2009a. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html (último acceso: 14 de julio de 2009).
—. «Current difficulties in the teaching of mathematical analysis at university : an essay review of 'Yet another introduction to analysis by Victor Bryant', (Cambridge University Press, ISBN 0-521-38835-X).» *University of Warwick. David Tall*

Academic Page. Published in Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, (1992), 92/2, 37–42. 1992. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992f-bryant-review.pdf (último acceso: 12 de julio de 2009).

—. «From School to University: the effects of learning styles in the transition from elementary to advanced mathematical thinking.» *University of Warwick.In Thomas, M. O. J. (Ed.) Proceedings of The Seventh Annual Australasian BridgingNetwork Mathematics Conference, University of Auckland, 9– 26.* 1997g. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.htm (último acceso: 11 de julio de 2009).

Tall, David. «Functions and Calculus.» En *International Handbook of Mathematics Education*, de Anthony Bishop (Ed.), 289-325. Dordretch: Kluwer, 1997a.

—. «Introducing Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics, 23 (3). 29–33.» *University of Warwick.* 2004a. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html#2004 (último acceso: 15 de julio de 2009).

—. «Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, plenary address. In L. Meira & D. Carraher, (Eds.), Proceedings of PME 19, Recife, Brazil, I, 61– 75.» *University of Warwick. David Tall Reasearch Papers.* 1995b. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html (último acceso: 12 de julio de 2009).

—. «Metaphorical objects in advanced mathematical thinking. International Journal of Computers for Mathematical Learning 1: 61 – 65.» *Univesity of Warwick. .* 1997f. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html (último acceso: 12 de julio de 2009).

—. «Seminario de didáctica del análisis y didáctica de las funciones.» *University of Warwick. David Tall Research Papers.* 1995c. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html (último acceso: 14 de julio de 2009).

—. «The mutual relationship between higher mathematics and a complete cognitive theory for mathematical education.» Grenoble: Cinquième Colloque du Groupe Internationale P.M.E., 1981d. 316–321.

—. «The Nature of Advanced Mathematical Thinking. Paper presented to the Working Group for Advanced Mathematical Thinking at the Psychology of Mathematics Education Conference, Veszprem, Hungary.» *The University of Warwick. David Tall Academic Page.* 1988. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988i-nature-of-amt-pme.pdf (último acceso: 11 de julio de 2009).

Tall, David. «The psychology of advanced mathematical thinking.» Cap. I de *Advanced mathematical thinking*, de David Tall, 3-21. Dordretch: Kluwer Academic Publishers, 1991b.

—. «The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind.» *Mathematics Education Research Centre University of Warwick.* 1995. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994e-biolbrain–thmind.pdf (último acceso: 12 de julio de 2009).

—. «The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof.» *University of Warwick.In M. Bulmer, H. MacGillivray & C. Varsavsky (Eds.), Proceedings of Kingfisher Delta'05, Fifth Southern Hemisphere Symposium on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning (pp. 23-35). Fraser Island, Australia.* 2005g.

http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html#2005 (último acceso: 12 de julio de 2009).

—. «Thinking Through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288.» *University of Warwick.* 2004d. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html#2004 (último acceso: 8 de julio de 2009).

—. «Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Research Centre.» *University of Warwick. An invited icmi lecture at the International Congress of Mathematicians, Zurich, August.* 1994. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996i-amt-pub-am.pdf (último acceso: 11 de julio de 2009).

Tall, David, David Smith, y Cynthia Piez. «Technology and Calculus.» En *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Volume I: Research Syntheses*, editado por Kathleen Heid y Glendon Blume (eds.), 207-258. New York: National Council Teachers Mathematics, 2008.

Tall, David, Oleksiy Yevdokimov, Boris Koichu, Walter Whiteley, Margo Kondratieva, y Ying-Hao Cheng. «The Cognitive Development of Proof.» 2011. www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall (último acceso: 15 de 03 de 2012).

Tall, David, y Juan Pablo Mejía Ramos. « The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof.» *University of Warwick. Publicado en Hanna, G., Jahnke, H. N., & Pulte, H. (Eds.), Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives. New York: Springer.* 2009. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html (último acceso: 15 de julio de 2009).

Tall, David, y Mikhail Katz. «A Cognitive Analysis of Cauchy's Conceptions of Continuity, Limit, and Infinitesimal, with implications for teaching the calculus.» 2011. www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall (último acceso: 23 de 05 de 2012).

Tall, David, y otros. «Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking.» *University of Warwick. In Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1, 81–104.* 2001a. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html (último acceso: 12 de julio de 2009).

Taylor (Ed.), Peter, y John Wallace (Ed.). *Contemporary Qualitative Research. Exemplars for Science and Mathematics Educators.* Primera edición. Dordrecht: Springer, 2007.

Thompson, Patrick. «Yes, Virginia, Some Children D o Grow Up To Be Mathematicians.» *San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.* 1999. http://pat-thompson.net/PDFversions/1991AdvdMath.pdf (último acceso: 10 de septiembre de 2008).

Trends in International Mathematics and Science Study, (TIMSS). «Advanced 2008 assessment frameworks.» *Timss & Pirl International Study Center.* 2007. http://timss.bc.edu/PDF/TIMSS_Advanced_AF.pdf (último acceso: 10 de noviembre de 2008).

Valverde, Gilbert, Leonard Bianchi, Richard Wolfe, y William Houang, Richard Schmidt. *According to the book Using Timss To Investigate The Translation Of Policy Into Practice Through The World Of Textbooks.* New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Vergnaud, Gérard. «Algunos problemas teóricos de la didáctica referidos a un ejemplo: las estructuras aditivas.» Cap. III de *Introducción a la idáctica de las ciencias y la matemática*, de Samuel Johsua y Jean Jacques Dupin, traducido por Ana Beatriz Narvaja y Nancy Roggier, 134-142. Buenos Aires: Colihue, 2005.

Vergnaud, Gerard. «The Nature of Mathematical Concepts.» En *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*, de Terezinha Nunes y Peter Bryant(eds.), 5-29. London: Psycology Press, 2011.

Veysseyre, Renée. *Statistique et probabilités pour l'ingénieur.* Segunda. Paris: Dunod, 2006.

Vinner, Shlomo. «The function concept as a prototype for problems in mathematics learning.» En *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy.: .*, de Gershon Harel y Ed Dubinsky, 195 – 213. Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1992.

Vinner, Shlomo. «The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics.» En *Advanced marthematical thinking*, de David Tall, 68-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991.

—. «Visual considerations in college calculus; students and teachers. .» *Theory of mathematical education proceedings of the third iternational conference.* Dordretch: Kluwer, 1988. 109-116.

Vinner, Shlomo, y David Tall. «Existence Statements and Constructions in Mathematics and Some Consequences to Mathematics Teaching.» *The American Mathematical Monthly* 89, nº 10 (1982): 752-756.

Vinner, Shlomo, y Tommy Dreyfus. «Images and definitions for the concept of function. .» *Journal of Research in Mathematics Education. 20 (4)*, 1989: 356-366.

Voevodin, V. V. *Álgebra lineal.* Primera edición. Priemra reimpresión. Traducido por K. P. Medkov. Moscú: Mir, 1986.

Vollrath, Hans-Joachim. «Reflections on mathematical concepts as starting points for didactical thinking.» En *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*, 61-72. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Vygotski, Lev. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica, 2006.

Vygotski, Lev. «Pensamiento y lenguaje .» En *Obras escogidas, Volumen 2*, de Lev Vygotski. Madrid: Visor, 1994.

Weber, Keith. «Student difficulties in constructing proofs: The need for strategic knowledge.» *Educational Studies in Mathematics, 48, 101-119.* 2001. http://www.gse.rutgers.edu/faculty/genFacultyProfileBiography~cguid~%7B0690CCC6-8499-4908-8F5D-A5F73D5D6311%7D~ciid~fac_1069.asp (último acceso: 21 de septiembre de 2008).

Weber, Keith, y Lara Alcock. «Semantic and syntactic proof productions.» *Educational Studies in Mathematics, 56, 209-234.* 2004. http://www.gse.rutgers.edu/faculty/genFacultyProfileBiography~cguid~%7B0690CCC6-8499-4908-8F5D-A5F73D5D6 (último acceso: 21 de septiembre de 2008).

—. «Using warranted implications to understand and validate proofs.» *For the Learning of Mathematics, 25(1), 34-38.* 2005. http://www.gse.rutgers.edu/faculty/genFacultyProfileBiography~cguid~ (último acceso: 21 de septiembre de 2008).

Weber, Robert. *Basic Content Analysis.* Tercera edición. London: Sage University Paper Series, 2012.

Weinreich, Gabriel. *Geometrical Vectors.* Segunda. Chicago: The University Chicago Press, 2013.

Whitehead, Alfred North. *An Introduction to Mathematics.* New York: Henry Holt, 1965.

Whithehead, Alfred North, y Bertrand Russell. *Principia Mathematica.* Primera ediición. [Original 1910: Principia mathematica]. Traducido por Juan Manuel Domínguez Rodríguez. Vol. II. 2 vols. Madrid: Paraninfo, 1981b.

Whithehead, Alfred, y Bertrand Russell. *Principia Mathematica.* Primera edición. [Original 1910: Principia mathematica]. Traducido por José Manuel Domínguez Rodríguez. Vol. I. II vols. Madrid: Paraninfo, 1981a.

Wilcox, Rand. *Fundamentals of Modern Statistical Methods. Substantially Improving Power and Accuracy.* Segunda edición. New York: Springer, 2010.

Williams, Gayes. «Identifying tasks that promote creative thinking en mathematics: A tool.» . *In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Eds.), 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol II, pp. 698-705.* 2012. http://epubl.ltu.se/1402-1757/2005/18/LTU-LIC-0516-SE.pdf (último acceso: 11 de enero de 2013).

Williamson, Richard, Richard Crowell, y Hale Trotter. *Calculus of Vector Functions.* Segunda edición. Englewwod Cliffs, N.J.: Prentica Hall, 1968.

Wilson, Robin, y John Watkins. *Graphs. An Introductory Approach. A First Course in Discrete Mathematics.* Primera edición. New York: John Wiley & Sons, 1990.

Wunsch, David. *Complex variables with applications.* Segunda edición. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Yaglom, A, y I Yaglom. *Probability and Information.* Segunda edición. Traducido por V Jain. Dordrecht: Kluwer, 1983.

Zorich, Valdimir. *Analysis I.* Segunda. Heidelberg: Springer, 2004.

Zorich, Vladimir. *Mathematical Analysis I.* Primera. Traducido por Roger Cooke. Berlín: Springer, 2004a.

ANEXO

Anexo I

1.1. Libros de texto estudiados por Mouzakitis

Comparative Analysis of Italian and Greek Euclidean Geometry textbooks: a case study (Mouzakitis 2006, 1-33):

(a) Il Nuovo Pensiero Geometrico by Cateni, Fortini and Bernardi (2002); (b) Euclidean Geometry by Argyropoulos, Vlamos, Katsoulis, Markatis and Polyhronis (2004).

1.2. Libros de texto estudiados por Brändström 2005

Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks. An analysis of the levels of difficulty (Brändstrom 2005, 1-97):

(a); Matematikboken X (Undvall, Olofsson, & Forsberg, 2001); (b) Matte Direkt 7 (S. Carlsson, Hake, & ¨Oberg, 2001); (c)Tetra 7 (Carlsson, Ingves, y Ohman, 1998).

1.3. Libros de texto estudiados por Kulm 2000

(Kulm y Curtis 2000, Kulm 1999, Kulm, Roseman y Treistman 1999)
Algebra, Prentice Hall, 1998. Algebra 1: Explorations and Applications, McDougal Littell, 1998. Algebra 1: Integration, Applications, Connections, Glencoe/McGraw-Hill, 1998. Concepts in Algebra, Everyday Learning, 1998. Contemporary Mathematics in Context (CORE-Plus Mathematics Project), Everyday Learning, 1998. Cord Algebra 1: Mathematics in Context, South-Western, 1998. Focus on Algebra, ScottForesman /Addison Wesley, 1998. Interactive Mathematics Program (IMP), Key Press, 1998. MATH Connections: A Secondary Mathematics Core Curriculum, Its About Time, Inc., 1998. Mathematics: Modeling Our World (The ARISE Curriculum), South-Western Educational Publishing Co., 1998. SIMMS Integrated Mathematics: A Modeling Approach Using Technology, Simon & Schuster, 1998. UCSMP Algebra, ScottForesman/Addison Wesley, 1998.

1.4. Libros de texto estudiados por Lovric 2004

Los textos: Newton, I. (1769): Universal Arithmetick; Cournot, M. (1857): Traité Elémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal. Paris: Hachette ; Rice, J, Johnson, W. (1888) : An elementary Treatise on the Differential Calculus. New York: MacMillan and Co.; Thomas, G. (1953): Calculus. New Yor: Addison Wesley; Larson, Hostetler, Edwards/Edwuards, Penney/Ellis, Gullik/Varberg, Purcell/ Adams/ Stewart/Farlow, Haggard (+1990): Calculus.

Anexo II

2.1. Miembros del PME (*Psychology of Mathematical Education*)

Past and current members of the International Committee (IC): Jill Adler, South Africa, 1994, Janet Ainley, UK, 1996, Avraham Arcavi, Israel, 1995, Michele Artigue, France, 1990, Ferdinando Arzarello, Italy, 2004, 2005, Mike Askew, United Kingdom, 2004, Nicolas Balacheff, France, 1983, 1988*, Mariolina Bartolini Bussi, Italy, 1991, Luciana Bazzini, Italy, 2001, Gerhard Becker, Germany, 1983, Merlyn Behr, USA, 1982, Alan Bell, United Kingdom, 1978, Jacques Bergeron, Canada, 1983, Alan Bishop, United Kingdom, 1986, Janete Bolite Frant, Brazil, 1999, George Booker, Australia, 1985, Marcello Borba, Brazil, 2005, Chris Breen, South Africa, 1998, 2004*, Gard Brekke, Norway, 1997, Leonie Burton, United Kingdom, 1982, Terezinha Carraher, Brazil, 1986, Helen Chick, Australia, 2003, Paul Cobb, USA, 1987, Anne Cockburn, United Kingdom, 2000, Elmar Cohors-Fresenborg, Germany, 1977, Kevin Collis, Australia, 1981,1984*, Claude Comiti, France, 1979, Jere Confrey, USA 1992, Martin Cooper, Australia, 1990, Jorge Da Rocha-Falcão, Brazil, 2001, Bernadette Denys, France, 1991, Sandy Dawson, Canada, 2002, Jan Draisma, Mozambique, 1998, Tommy Dreyfus, Israel, 1983, Willibald Dörfler, Austria, 1985, Laurie Edwards, USA, 2008, Theodore Eisenberg, Israel, 1987, Paul Ernest, United Kingdom, 1992, Ruhama Even, Israel, 1999, Olimpia Figueras, Mexico, 2007, Eugenio Filloy, Mexico, 1981, Ephraim Fischbein, Israel, 1977*, Helen Forgasz, Australia, 2006, Cristina Frade, Brazil, 2007, Hans Freudenthal, The Netherlands, 1978, AnneBerit Fuglestad, Norway, 2002, Toshiakira Fujii, Japan, 1998, Peter Gates, United Kingdom, 2001, Claude Gaulin, Canada, 1989, Zahra Gooya, Iran, 2004, Angel Gutierrez, Spain, 1990, Gila Hanna, Canada, 1989, Markku Hannula, Finland, 2003, Kath Hart, United Kingdom, 1979, 1990* , Klaus Hasemann, Germany, 1981, Aiso Heinze, Germany, 2007, Nicolas Herscovics, Canada, 1978, Rina Hershkowitz, Israel, 1980, 2001*, Ichei Hirabayashi, Japan, 1984, Alena Hošpesová, Czech Republic, 2008, Celia Hoyles, United Kingdom, 1983, Bat-Sheva Ilany, Israel, 2007, Claude Janvier, Canada, 1979, Barbara Jaworski, United Kingdom, 1990, Christine Keitel, Germany, 1985, Carolyn Kieran, Canada, 1985, 1992*, Masataka Koyama, Japan, 2000, Chronis Kynigos, Greece, 1991, Colette Laborde, France, 1987, Colette Laborde, France, 1987, Gilah Leder, Australia, 1989, 1998*, Stephen Lerman, United Kingdom, 1993, 1995*, Richard Lesh, USA, 1978, Frank Lester, USA, 1988, Hee-Chan Lew, Korea, 2004, Peter Liljedahl, Canada, 2006, Fou-Lai Lin, Taiwan, 1988, 2007*, Pi-Jen Lin, Taiwan, 2005, Francis Lowenthal, Belgium, 1980, Carolyn Maher, USA, 1991, Nicolina Malare, Italy, 1997, Maria Alessandra Mariotti, Italy, 1994, João Filipe Matos, 1995, Luciano Meira, Brazil, 1994, Hartwig Meissner, Germany, 1979, Teresa Navarro di Mendicuti, Mexico, 1986, Ana Mesquita, France, 1996, James Moser, USA, 1980, Judith Mousley, Australia, 1995, Ricardo Nemirovsky, USA, 1999 , Pearla Nesher, Israel, 1978, 1986*, Cynthia Nicol, Canada, 2006, Nobuhiko Nohda, Japan, 1988, Jarmila Novotná,Czech Republic, 2003, Rafael Núnez, Switzerland, 1995, JeongSuk Pang, Korea, 2008, Andrea Peter-Koop, Germany, 2001, David Pimm, United Kingdom, 1987, Alwyn Olivier, South Africa, 1996, Erkki Pehkonen, Finland, 1995, João Ponte, Portugal, 1988, Norma Presmeg, USA, 1997, Luis Puig, Spain, 1994, Teresa Rojano, Mexico, 1993, Tom Romberg, USA, 1984, André Rouchier, France, 1981, Catherine Sackur, France, 1999, Haralambos Sakonides, Greece, 2002, Mamokgethi Setati, South Africa, 2003, Keiichi Shigematsu, Japan, 1992, Yoshinori Shimizu, Japan, 2005, Richard Skemp, United Kingdom, 1978, 1980*, Judith Sowder, USA, 1992, Kaye Stacey, Australia, 1993, Leen Streefland, The Netherlands, 1981, Peter Sullivan, Australia, 2000, Janos Suranyi, Hungary, 1977 and 1986 , Dinah Tirosh, Israel, 1989, Stefan Turneau, Poland, 1977, Pessia Tzamir, Israel, 2004, Marianna Tzekaki, Greece, 2008, Ron Tzur, USA, 2002, Behiye Ubuz, Turkey, 2006, Marja van den Heuvel-Panhuizen, The Netherlands, 1998, Joop van Dormolen, The Netherlands, 1984, Gérard Vergnaud, France, 1977, 1982*, Alfred Vermandel, Belgium, 1977 and 1982, Shlomo Vinner, Israel, 1982, Ipke Wachsmuth, Germany, 1984, Sigrid Wagner, USA, 1980, Tad Watanabe, USA, 2000, Vicki Zack, Canada, 1998, Orit Zaslavsky, Israel, 1997, Wáczek Zawadowski, Poland, 1993, * Indicates President.

El listado alfabético procede del sitio oficial del PME (*Psychology of Mathematical Education*): http://www.igpme.org/, consultado el 24 de enero de 2013. La próxima conferencia: 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 37), which will be held at Kiel University from July 28 to August 2, 2013

Anexo III

3.1. Definiciones de análisis de contenido

Figura III. 1. Recopilación de definiciones de análisis de contenido entre 1952 y 2002, presentadas en el texto *The Content Analysis. Guidebook* (Neuendorf 2012, 10).

Berelson (1952, p. 18): Content analysis is a research technique for the objective, systematic, and quantitative description of the manifest content of communication.

Stone, Dunphy, Smith, & Ogilvie (1966, p. 5, with credit given to Dr. Ole Holsti): Content analysis is any research technique for making inferences by systematically and objectively identifying specified characteristics within text.

Carney (1971, p. 52): The general purpose technique for posing questions to a "communication" in order to get findings which can be substantiated. . . . [T]he "communication" can be anything: A novel, some paintings, a movie, or a musical score—the technique is applicable to all alike and *not* only to analysis of literary materials.

Krippendorff (1980, p. 21): Content analysis is a research technique for making replicable and valid inferences from data to their context.

Weber (1990, p. 9): Content analysis is a research method that uses a set of procedures to make valid inferences from text.

Berger (1991, p. 25): Content analysis . . . is a research technique that is based on measuring the amount of something (violence, negative portrayals of women, or whatever) in a representative sampling of some mass-mediated popular art form.

Riffe, Lacy, & Fico (1998, p. 20): Quantitative content analysis is the systematic and replicable examination of symbols of communication, which have been assigned numeric values according to valid measurement rules, and the analysis of relationships involving those values using statistical methods, in order to describe the communication, draw inferences about its meaning, or infer from the communication to its context, both of production and consumption.

This book: Content analysis is a summarizing, quantitative analysis of messages that relies on the scientific method (including attention to objectivity-intersubjectivity, a priori design, reliability, validity, generalizability, replicability, and hypothesis testing) and is not limited as to the types of variables that may be measured or the context in which the messages are created or presented.

Fuente: *The Content Analysis. Guidebook* (Neuendorf 2012, 10)

3.2. Ranking de universidades

Figura III. 2. La composición del índice del laboratorio de Cibermetría del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, CSIC, España el ranking de universidades europeas, 2012

INDICATOR	MEANING	COVERAGE	SOURCE	WEIGHT
IMPACT	Number of backlinks* Number of backdomains	current (historical)	**Majestic SEO** **ahrefs**	50%
PRESENCE	Number of webpages (all)	current	**Google**	20%
OPENNESS	Number of papers (pdf, doc, docx, ppt)	2007-2011	**Google Scholar**	15%
EXCELLENCE	Number of papers in the 10% top cited	2003-2010	**Scimago**	15%

Fuente: página del CCSIC de España, http://www.webometrics.info/es/metodologia

Figura III. 3. Las primeras 10 universidades europeas según ranking CSIC, España 2012

Ranking	Ranking Mundial	Universidad	Det.	País	Presencia (Posición*)	Impacto (Posición*)	Apertura (Posición*)	Excelencia (Posición*)
1	20	University of Cambridge			43	35	94	12
2	25	University of Oxford			109	37	64	13
3	29	Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich / Swiss Federal Institute of Technology Zurich			63	87	1	41
4	43	University College London			120	86	126	8
5	57	Utrecht University / Universiteit Utrecht			274	182	15	33
6	61	Università di Bologna			61	133	99	121
7	64	University of Edinburgh			281	97	123	52
8	70	Universidade do Porto			111	122	37	285
9	71	Universität Wien			121	100	74	247
10	72	(1) Norwegian University of Science & Technology / Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet			292	161	9	252

Fuente: página del CCSIC de España, http://www.webometrics.info/es/Europe_es

3.3. Tipografía original de una definición

Figura III. 4. Reproducción del texto *Analysis I* (Zorich 2004a, 395)

Definition 1. Ein *Weg* in $\mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ eines Intervalls der reellen Geraden auf $\mathbb{R}^3$, die durch die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$, die auf dem Intervall stetig sind, definiert ist.

Fuente: *Analysis I* (Zorich 2004a, 395)

3.4. Cálculo de un vector de demandas

Aunque ciertamente la prueba de cualquiera de los apartados implica algún tipo de cálculo, el mismo se ejecuta en el plano abstracto en que se sitúa el enunciado, por lo que no consignamos ninguna demanda algorítmica simple en D1, como tampoco se plantea la demanda explícita de una interpretación geométrica u otra representación tampoco se incluye D3 como presente en el enunciado. Es claro que D7 (y entonces D6) son exigidos desde la estructura abstracta del enunciado con los procedimientos propios (D4) de las pruebas de la igualdad (2), pero que ya requiere de un análisis con la aparición de las desigualdad (1). Es también cumplida la necesidad de integrar resultados previos para producir nuevos (así por ejemplo el razonamiento exige invertir el orden de las pruebas, con la desigualdad (3) que es lógicamente *anterior* a la desigualdad (1), y la complejidad crece en naturaleza en (4) con la obligación de considerar la inecuación con el parámetro α cuantificado como arbitrario, de modo, de manera que está exigida D8.

3.5. Una matriz de confiabilidad

Figura III. 5. La matriz de confiabilidad de la componente de demanda D1, con los textos y sus actividades por cada fila y los observadores por columnas

Confiabilidad kappa = 0.79

TN	Identif.	PN	EN	O0	O1	O2	O3	0	1
T1	§III.28	317	5	1	1	1	1	0	4
T1	§III.46	319	23	1	1	1	1	0	4
T2	§8.1.17	274	47	1	1	0	1	1	3
T2	§8.4.11	307	87	0	0	0	0	4	0
T2	§8.5.2	313	93	1	1	1	1	0	4
T2	§8.5.6	314	97	0	0	0	0	4	0
T2	§8.5.8	314	99	0	0	0	0	4	0
T3	§6.1.25	383	134	1	1	1	0	1	3
T3	§6.1.26	383	135	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.3	392	149	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.7	392	153	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.11	392	157	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.12	392	158	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.17	392	163	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.19	392	165	1	0	1	1	1	3
T3	§6.2.23	392	169	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.29	393	175	0	0	0	0	4	0
T3	§6.2.31	393	177	1	1	1	1	0	4
T3	§6.2.36	393	182	1	1	1	1	0	4
T3	§6.3.7	400	190	1	1	1	1	0	4
T3	§6.3.10	400	193	1	1	1	1	0	4
T3	§6.7.9	435	220	1	1	1	0	1	3
T3	§6.7.17	436	228	1	1	1	1	0	4
T3	§6.7.25	436	236	1	1	1	1	0	4
T3	§6.8.2	443	243	1	1	1	1	0	4
T3	§6.8.10	443	251	1	1	1	1	0	4
T3	§6.8.16	443	257	1	1	1	0	1	3
T4	§7.29	257	262	1	1	1	1	0	4
T4	§7.37	258	270	0	0	0	0	4	0
T4	§7.56	261	289	1	1	1	1	0	4
T5	§23.1	85	296	0	0	0	0	4	0
T5	§25.1	95	304	0	1	0	0	3	1
T5	§26.2	98	310	1	1	1	1	0	4
T5	§28.6	106	322	0	0	0	0	4	0
T5	§31.3	114	335	0	0	0	0	4	0

Referencias

- TN: Identificación del texto
- Id: Identificación del ejercicio
- PN: Número de página
- EN: Código de ejercicio
- O0: Valor asignado observador 0
- O1: Valor asignado observador 1
- O2: Valor asignado observador 2
- O3: Valor asignado observador 3
- 0 Cantidad coincidente en 0
- 1 Cantidad coincidente en 1

El coeficiente kappa:

$$\kappa = \frac{Pm - Pe}{1 - Pe}$$

El cálculo:

$$P_i = \frac{1}{n^2 - n} \sum_{j=1}^{k} (n_{ij}^2 - n_{ij})$$

$$P_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_i$$

$$p_j = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{N} n_{ij}$$

$$P_e = \sum_{j=1}^{k} p_j^2$$

Confiabilidad demanda D1

Fuente: elaboración propia

La matriz de confiabilidad permite la asignación de una medida de confianza al acuerdo entre observadores múltiples en la asignación de segmentos de prosa matemática a diversas categorías predefinidas a través de una grilla de lectura que es compartida por los observadores.

3.6. Escala para el κ–Fleiss

Figura III. 6. Una escala de niveles de confiabilidad del estimador κ–Fleiss (Sim y Wright 2005, 262, Landis y Koch 1977, 159-174) y una observación acerca de su validez

κ	Interpretation
< 0	Poor agreement
0.01 – 0.20	Slight agreement
0.21 – 0.40	Fair agreement
0.41 – 0.60	Moderate agreement
0.61 – 0.80	Substantial agreement
0.81 – 1.00	Almost perfect agreement

Una escala (Sim y Wright 2005, 262, Landis y Koch 1977, 159-174) que asigna medidas de confiabilidad de acuerdo al índice kappa. En realidad, corresponde efectuar el adecuado test de hipótesis para asignar un valor objetivo a la probabilidad de acuerdo más allá del mero azar de los observadores.

Fuente: elaboración propia a partir de (Sim y Wright 2005, 262, Landis y Koch 1977, 159-174)

Anexo IV

4.1. Criterios Bibliométricos Objetivos

Los rankings de universidades han sido construidos con los siguientes criterios: (a) Número de ex-alumnos galardonados con premios internacionales: (b) Número de académicos galardonados con premios internacionales; (c) Número de publicaciones en revistas arbitradas e indexadas de circulación internacional; (d) Número de citas a los trabajos publicados de sus académicos; (e) Número de publicaciones en revistas de alto factor de impacto; (f) Número y volumen de contenidos de tipo académico en internet.

El peso con el que estos rubros participan en la construcción de los respectivos índices puede consultarse en los sitios correspondientes. Para el organismo español Laboratorio de Cibermetría del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC, en www.webometrics.info/es/Ranking_Europe), y para el ranking mundial por especialidades (QS World University Rankings 2013, www.topuniversities.com).

4.2. Ranking de Universidades

Según los criterios detallados en el punto anterior, resultan los siguientes ordenamientos para el año 2012.

(A) Las primeras 10 universidades de Europa Occidental: University of Cambridge; University of Oxford; Swiss Federal Institute of Technology; University College London; Utrecht University; Università di Bologna; University of Edinburgh; Universidade do Porto; Universität Wien; Norwegian University.

(B) Las primeras 10 universidades del mundo: Massachusetts Institute of Technology (MIT); Harvard University; Stanford University; Princeton University; University of California, Berkeley (UCB); University of Cambridge; University of Oxford; New York University (NYU); Yale University; University of California, Los Angeles (UCLA).

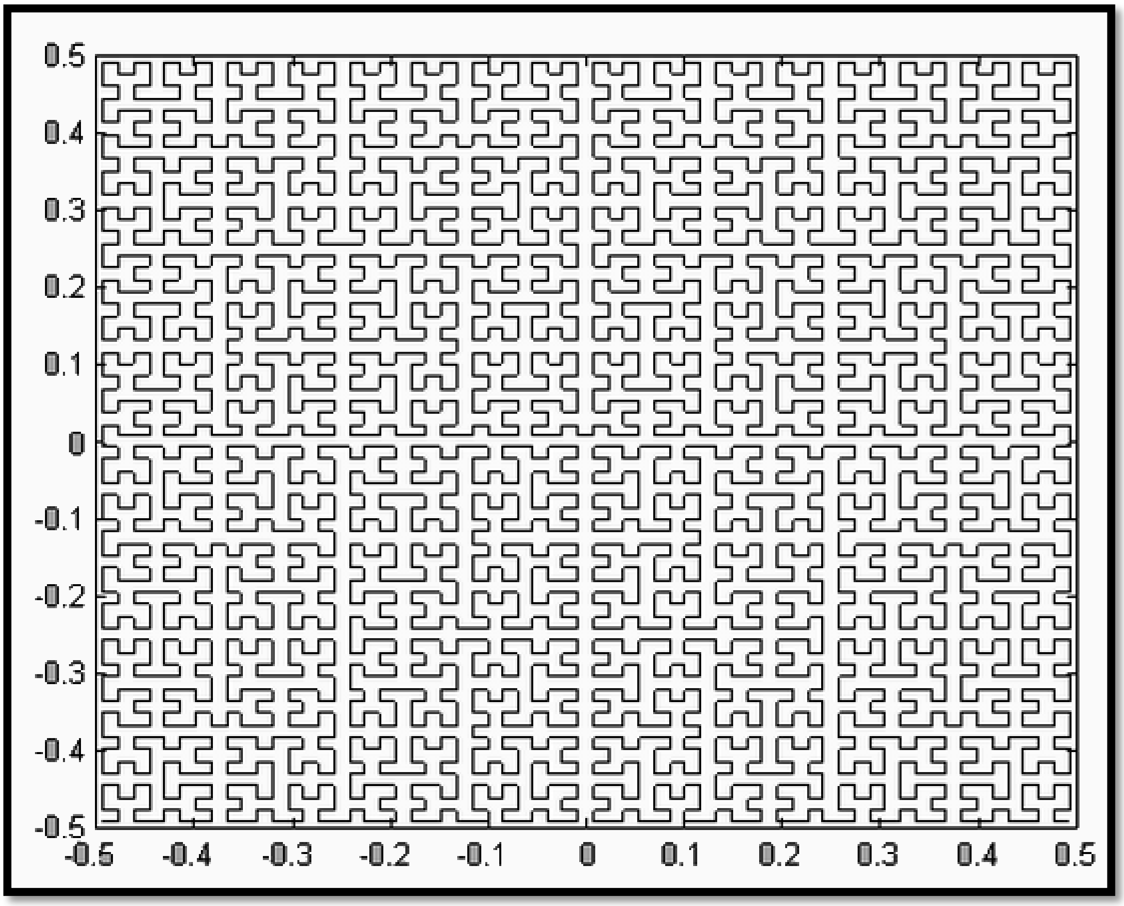
Anexo V

5.1. Curva de Hilbert

El siguiente segmento de código recurrente escrito en la aplicación matlab® y grabado como m-file con el nombre *fractal*, puede ser ejecutado luego desde la pantalla de comandos con la sentencia `[x,y] = fractal (6); plot (x, y),` devolviendo la Figura IV.1.

```
function [x,y] = fractal(n);
if n <= 0, x = 0; y = 0; else; [x0, y0] = fractal(n - 1);
x = .5*[-.5+y0 -.5+x0 .5+x0 .5-y0]; y = .5*[-.5+x0 .5+y0 .5+y0 -.5-0];
end
```

Figura IV. 1. Una etapa de la construcción de la curva de Hilbert



Fuente: elaboración propia

5.2. Números pseudo-aleatorios (1)

La sencilla sentencia en lenguaje de la aplicación matlab® en cualquiera de sus versiones: “ceil(36*rand(1,26))” genera 26 números enteros entre 1 y 36; los números pseudoaleatorios así generados superan las pruebas estándares de aleatoriedad (Foata y Fuchs 2013, Papoulis 1990, Ross 2013).

5.3. Números pseudo-aleatorios (2)

En la distribución uniforme todos los textos tienen la misma probabilidad de ser elegidos; se implementa mediante un generador de números pseudoaleatorios provisto por la aplicación matlab® con la instrucción del comando *rand*. La sentencia corrida –el 28 de julio de 2012– en el lenguaje de la aplicación sort(ceil(33*rand(13,1))), tuvo como resultado el vector numérico 1 4 5 7 8 9 13 22 24 25 27 30 32. El sentido en que puede llamarse aleatoria a esta secuencia así generada surge de su comportamiento ante las pruebas estandarizadas clásicas de aleatoriedad (Papoulis 1990, 251-258).

5.3. Números pseudo-aleatorios (3)

Todos los textos tienen la misma probabilidad de ser elegidos; se implementa mediante un generador de números pseudoaleatorios provisto por la aplicación matlab® con la instrucción del comando *rand*. La sentencia corrida – el 22 de agosto de 2012– en el lenguaje de la aplicación sort(ceil(26*rand(10,1))), tuvo como resultado el vector numérico 1 2 4 5 6 8 14 16 18 22. La secuencia se llama aleatoria dado su comportamiento ante pruebas estandarizadas clásicas de aleatoriedad (Papoulis 1990, 251-258).

Anexo VI

6.1. La matriz de las universidades

Matriz VI. 1. La identificación de las universidades de la población U del capítulo

U1	Universidad Argentina de la Empresa	U16	Universidad Nacional de la Patagonia, Ushuaia
U2	Universidad Católica Argentina, Buenos Aires	U17	Universidad Nacional de La Plata
U3	Universidad de Belgrano	U18	Universidad Nacional de Mar del Plata
U4	Universidad de Buenos Aires	U19	Universidad Nacional de Misiones
U5	Universidad de Entre Ríos	U20	Universidad Nacional de Río Cuarto
U6	Universidad de Mendoza	U21	Universidad Nacional de Salta
U7	Universidad de Palermo	U22	Universidad Nacional del Comahue
U8	Universidad Nacional de Cuyo	U23	Universidad Nacional del Comahue (distancia)
U9	Universidad Nacional de Entre Ríos	U24	Universidad Nacional del Litoral
U10	Universidad Nacional de Jujuy	U25	Universidad Nacional del Nordeste
U11	Universidad Nacional de La Pampa	U26	Universidad Nacional del Tucumán
U12	Universidad Nacional de la Patagonia, C. Rivadavia	U27	Universidad Nacional de San Juan
U13	Universidad Nacional de la Patagonia, Esquel	U28	Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires
U14	Universidad Nacional de la Patagonia, P. Madryn	U29	Universidad Tecnológica Nacional, Córdoba
U15	Universidad Nacional de la Patagonia, Trelew		

Fuente: elaboración propia

6.2. La matriz de los textos

Matriz VI. 2. El conjunto L de textos de álgebra lineal provenientes de las universidades codificadas en la Matriz VI. 1

	Texto: AUTOR (año): Título. Edición (cuando es citada). Lugar: Editorial
L1	ANTON. H. (1994): Introducción al álgebra lineal. Sexta reimpresión de la primera edición en español. México: Editorial Limusa, Grupo Noriega Editores.
L2	APOSTOL, T. (1980): Calculus. Segunda edición. Barcelona: Editorial Reverté.
L3	AYRES, F. (1997): Matrices. Primera edición. México: McGrawHill.
L4	BARBOLLA, R. y SANZ, P. (1998): Álgebra lineal con aplicaciones. Primera edición. Barcelona: Prentice Hall.
L5	BRU, R., CLIMENT J., MAS, J., URBANO, A. (2004): Álgebra Lineal. Primera edición. Buenos Aires: Alfaomega.
L6	BURGOS, J. (2006): Álgebra lineal y geometría cartesiana. Tercera Edición. Madrid: McGrawHill
L7	CCOTLAR, M y SADOSKY C. (1977): Introducción al Álgebra y Nociones de Álgebra Lineal., Eudeba
L8	DI CARO, H. (1975): Álgebra y elementos de geometría. Primera edición. Buenos Aires: CEI.
L9	Di PIETRO, D. (1970): Geometría del plano y del espacio. Buenos Aires: Alsina.
L10	FLOREY, F. (1980): Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones. Primera edición. México D. F. : Prentice Hall
L11	FRALEIGH, J y BEAUREGARD, R. (1990): Linear algebra. Second edition. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company.
L12	GASTAMINZA, M. L (1970): Nociones de Algebra. Cooperadora de U.N.S. Bahía Blanca.
L13	GENTILE, E. (1972): Notas de Algebra. Buenos Aires: Eudeba.
L14	GENTILE, E. (1975): Notas de Álgebra II: álgebra lineal. Buenos Aires: Editorial Docencia.
L15	GERBER, H. (1991): Álgebra lineal. Primera edición. México: Grupo editorial iberoamericana.
L16	GOLOVINA, L. (1974): Álgebra lineal y alguna de sus aplicaciones. Moscú: Editorial Mir.
L17	GROSSMAN, S. (1994): Álgebra lineal con aplicaciones. Tercera edición. Madrid: McGrawHill.
L18	HALMOS, P. (1971): Espacios vectoriales de dimensión finita..Segunda impresión revisada y corregida. México: Compañía Editorial Continental Sociedad Anónima.
L19	HERNÁNDEZ, E. (1994): Álgebra y geometría. Segunda edición. Wilmington, Delaware, EEUU: Addison-Wesley Iberoamericana y Universidad Autónoma de Madrid.
L20	HERSTEIN y WINTER (1994): Álgebra lineal y teoría de matrices. Primera edición. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
L21	HILL, R. (1997): Álgebra lineal con aplicaciones. Primnera edición. Barcelona: Prentice Hall.
L22	HOFFMAN, K y KUNZE, R. (1973): Álgebra lineal. Primera edición en español traducida de la segunda edición en inglés. Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall.
L23	KINDLE, J (1969).: Teoría y problemas de geometría analítica. Primera edición. Colombia: Mc. Graw Hill..
L24	KOLMAN, B. y HILL, D. (2006): Álgebra lineal. Octava edición. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.
L25	KREYSZIG, E. (1993): Advanced engineering mathematics. Seventh Edition. New York: John Wiley & Sons.
L26	LANG, S. (1986): Álgebra lineal. Primera edición en español de la segunda edición en idioma original. Máxico D. F.: Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.
L27	LAROTONDA, A. (1972): Álgebra Lineal y Geometría. Buenos Aires: Eudeba.
L28	LARSON E. y EDWARDS E: (1995): Introducción al álgebra lineal. Primera edición. México: Editorial Limusa.
L29	LAY, D. (2007): Álgebra lineal y sus aplicaciones. Tercera edición actualizada. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.
L30	LEÓN, S. (1993): Álgebra lineal con aplicaciones. Primera edición. México:CECSA.
L31	LIPSCHUTZ, S. (1995): Álgebra lineal. Primera edición. Barcelona: McGrawHill, series Schaum.
L32	MÁLTSEV, A. (1978): Fundamentos de Álgebra lineal. Tercera edición. Moscú: Editorial Mir.
L33	MARCUS, M y MINC, H. (1969): Introducción al álgebra lineal. Primera edición en español. Mexico: Compañía Editorial Continental Sociedad Anónima.
L34	NAKOS. G. y JOYNER, D. (1998): Álgebra lineal con aplicaciones. Primera edición. México D. F.: Thomson
L35	NASINI y LOPEZ (1997): Lecciones de Algebra y Geometría Analítica. Primera edición. Buenos Aires: E.U.C.A
L36	NICHOLSON, M. y KEITH, W. (2003): Álgebra lineal con aplicaciones. Madrid: McGrawHill.
L37	NOBLE, B y DANIEL, J. (1989): Álgebra lineal aplicada. Tercera edición. México D. F.: Prentice Hall.
L38	PAIGE y SWIFT, A. (1982): Elementos de álgebra lineal. Primera edición. Barcelona: Reverté.
L39	PERRY, W. (1994): Álgebra lineal con aplicaciones. Primera edición. Madrid: McGrawHill.
L40	PITA RUIZ, C. (1999): Álgebra lineal. Madrid: McGrawHill.
L41	POOLE, D. (2004): Álgebra lineal: una introducción moderna. Tercera Edición. México D. F.: Thomson
L42	PURCELL E. y VARBERG, D.(1996): Cálculo con Geometria Analitica. Primera edición. México: McGrawHill.
L43	RAYA A., RÍDER, A. y RUBIO, R. (2007): Álgebra y Geometría Lineal. Primera edición. Barcelona: Reverté.
L44	ROJO, A (1971): Algebra I. Buenos Aires: El ateneo.
L45	ROJO, A (1971): Algebra II. Buenos Aires: El ateneo.
L46	SALVADOR GIGENA Y OTROS: Álgebra y Geometría. Sin datos de edición.
L47	SANTALÓ, L. (1985): Vectores y tensores. Primera edición. Buenos Aires: Eudeba.
L48	STRANG, G. (2006): Álgebra lineal y sus aplicaciones. Cuarta edición. México: Thomson Learinig Iberoamérica.
L49	SUNKEL, A. (1992): Geometría analítica en forma vectorial y matricial. Buenos Aires: Nueva librería.
L50	VOEVODIN, V. (1986): Álgebra lineal. Primera reimpresión. Moscú: Editorial Mir.

Fuente: elaboración propia

6.3. Matriz de adyacencia

Matriz VI. 3. La matriz de adyacencia del grafo universidad-texto

Matriz Texto-Universidad: Una celda está ocupada por un 1 si la universidad correspondiente a su columna cita al libro correspondiente a su fila

UNIVERSIDAD N°

LIBRO N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	SU
1	1	1			1			1		1						1			1				1	1			1	1	1	12
2					1							1			1	1			1				1				1	1		8
3																	1	1		1										3
4													1																	1
5												1																		1
6	1	1		1	1		1		1		1				1			1	1	1	1	1		1		1		1		16
7														1																1
8																													1	1
9																							1							1
10														1														1		2
11		1																			1			1						3
12																							1							1
13																							1					1		2
14																							1					1		2
15	1		1																			1			1					4
16									1							1														2
17	1	1	1	1		1		1		1			1	1			1	1			1	1					1	1	1	16
18				1																										1
19																				1									1	2
20													1															1		2
21													1		1													1		3
22				1	1	1	1			1			1	1		1	1	1	1	1		1		1	1	1	1	1		18
23																							1							1
24												1			1						1									3
25																	1	1	1						1				1	5
26			1									1														1		1		4
27																1														1
28											1			1																2
29				1																										1
30													1		1	1														3
31		1	1			1	1		1			1													1			1		8
32				1	1																									2
33																					1									1
34	1						1											1							1					4
35									1			1																		2
36																	1													1
37	1			1											1						1									4
38																												1		1
39															1															1
40											1							1	1				1					1		5
41		1		1	1					1	1									1	1			1			1			9
42																													1	1
43	1																													1
44																			1				1							2
45																			1				1							2
46																													1	1
47												1																		1
48		1		1	1	1				1	1									1	1	1		1			1			11
49								1																						1
50				1																										1
SL	7	7	4	10	7	4	4	3	4	5	5	7	6	5	7	6	5	7	8	6	8	5	10	6	5	3	6	14	7	181

Fuente: elaboración propia

6.4. Las clasificaciones

En este trabajo se introducen diversas clasificaciones en un conjunto dado, como podría ser el conjunto L. Las habituales exigencias de crear categorías con el requisito de ser excluyentes dos a dos y exhaustivas sobre el conjunto a clasificar puede expresarse de un modo más general en un lenguaje funcional diciendo que si A es el conjunto a clasificar y B el conjunto de valores de una variable, basta introducir una *función* de A en B que se simboliza con $f: A \rightarrow B$, de modo que el conjunto preimagen a través de f de una partición de B es precisamente una partición de A: la llamada clasificación. A modo de ejemplo, la distribución de la población por cantidad de referencias introduce una partición en el conjunto L en clases mutuamente excluyentes cuya unión es L, esto es lo que se conoce como una clasificación, afirmación que es inmediata desde que definimos los conjuntos de nivel k de la función R_L, como $N_k (R_L) \stackrel{def}{=} \{L_p \in L: R_L(L_p) = k\}$, con $k \in I$, siendo I el intervalo natural $I = <1, 18>$. Así, vemos que N_7 es el conjunto vacío, en tanto que $N_{18} = \{L_{22}\}$. La figura anterior, entonces, no es sino el gráfico de una función $L_R: I \rightarrow N$ al que $L_R (k) = card (N_k)$, donde card designa la función cardinal que devuelve el número de elementos del conjunto sobre el que se aplica (Korn 1971, 17-18).

6.5. Introducción de una métrica

Si en un espacio E se quiere introducir una distancia *d* de manera de poder establecer cuán próximos se hallan sus elementos se necesita el cumplimiento de ciertos requisitos que garantizan una coherencia con lo que se pretende distinguir con tal distancia. (1) La distancia *d* debe asignar a todo par de elementos distintos de E un número positivo, mientras que la distancia de cualquier elemento a sí mismo debe ser nula. (2) La distancia *d* entre un elemento *a* y otro elemento *b* debe ser la misma que entre el elemento *b* y el elemento *a*. (3) La distancia entre dos elementos no debe superar la suma de las distancias entre cada uno de ellos y un tercero.

La distancia *d* introducida en el espacio Referencia-Estilo en el capítulo 6 a través de la expresión $d (RE_{ij}, RE_{pq}) \stackrel{def}{=} | i – p | + | j – q |$ verifica los tres axiomas anteriores; de hecho es lo que en el lenguaje de los espacios métricos se denomina una *distancia* 1 en el espacio de índices de la matriz Referencia-Estilo.

6.6. Identificación de ejercicios en los textos

Matriz VI. 4. Localización e identificación de ejercicios analizados en los textos de la muestra

	Identificación de los ejercicios	**Ubicación en las páginas**	**N. Ej.**
T1	III.24-III-53	316-319	30
T2	Sección 8.1, ejercicios 1-17; Sección 8.2: 1-17; Sección 8.3: 1-12; Sección 8.4: 1-15; Sección 8.5: 1-14.	273-274; 286-288; 295-296; 305-308; 313-314.	75
T3	Sección 6.1: PP 1-4, Ej. 1-34; Sección 6.2: PP. 1-3, Ej. 1-36; Sección 6.3: PP 1, Ej. 1-26. Sección 6.7: PP.2, Ej 1-28; Sección 6.8: PP 1-2, Ej. 1-16.	382-383; 391-393; 400-401; 435-436; 442-443	152
T4	Trabajo Práctico VII: 7.25-7.62.	257-262	38
T5	§23: 1-5; §24: 1-3; §25: 1-5; §26: 1-4; §27: 1-4; §28: 1-6; §29: 1-5; §30: 1-5; §31: 1-4; §32: 1-4; §33: 1-2.	85; 88; 95; 98; 101;106; 109; 113; 114; 116; 117.	47

Fuente: elaboración propia

6.7. Identificación local y global de los ejercicios

Los ejercicios tienen una numeración local que es propia del texto al que pertenecen, y una numeración global que es propia de este trabajo, que los identifica correlativamente con un único número natural entre 1 y 342. La matriz VI.5 permite establecer la correspondencia entre ambas numeraciones, estableciéndose además de qué texto (columna 1 de la matriz), la pertenencia a la sección del texto (columna 2), el número de página en el libro de texto (columna 3), y el número correlativo que le asigna esta tesis. Luego, las columnas de la matriz repiten estos significados periódicamente con período 4. A modo de ejemplo, puede verse que el ejercicio número E75 se encuentra en la página 296 del texto T2, en la sección 8.3, y lleva una numeración local 11, o también que el ejercicio listado como número E217 se halla en la página 435 del texto T3, en la sección 6.7 y lleva la numeración local 6.

Matriz VI. 5. Identificación local y global de los ejercicios analizados

TN	Identif.	PN	EN	TN	Identif.	PN	EN	TN	Identif.	PN	EN	TN	Identif.	PN	EN	TN	Identif.	PN	EN
T1	§III.24	316	1	T2	§8.3.9	296	73	T3	§6.2pp.1	391	144	T3	§6.7.4	435	215	T4	§7.53	260	286
T1	§III.25	316	2	T2	§8.3.10	296	74	T3	§6.2pp.2	391	145	T3	§6.7.5	435	216	T4	§7.54	261	287
T1	§III.26	316	3	T2	§8.3.11	296	75	T3	§6.2pp.3	391	146	T3	§6.7.6	435	217	T4	§7.55	261	288
T1	§III.27	316	4	T2	§8.3.12	296	76	T3	§6.2.1	392	147	T3	§6.7.7	435	218	T4	§7.56	261	289
T1	§III.28	317	5	T2	§8.4.1	305	77	T3	§6.2.2	392	148	T3	§6.7.8	435	219	T4	§7.57	261	290
T1	§III.29	317	6	T2	§8.4.2	305	78	T3	§6.2.3	392	149	T3	§6.7.9	435	220	T4	§7.58	261	291
T1	§III.30	317	7	T2	§8.4.3	305	79	T3	§6.2.4	392	150	T3	§6.7.10	435	221	T4	§7.59	261	292
T1	§III.31	317	8	T2	§8.4.4	306	80	T3	§6.2.5	392	151	T3	§6.7.11	435	222	T4	§7.60	261	293
T1	§III.32	317	9	T2	§8.4.5	306	81	T3	§6.2.6	392	152	T3	§6.7.12	435	223	T4	§7.61	261	294
T1	§III.33	317	10	T2	§8.4.6	306	82	T3	§6.2.7	392	153	T3	§6.7.13	436	224	T4	§7.62	262	295
T1	§III.34	317	11	T2	§8.4.7	306	83	T3	§6.2.8	392	154	T3	§6.7.14	436	225	T5	§23.1	85	296
T1	§III.35	318	12	T2	§8.4.8	306	84	T3	§6.2.9	392	155	T3	§6.7.15	436	226	T5	§23.2	85	297
T1	§III.36	318	13	T2	§8.4.9	306	85	T3	§6.2.10	392	156	T3	§6.7.16	436	227	T5	§23.3	85	298
T1	§III.37	318	14	T2	§8.4.10	307	86	T3	§6.2.11	392	157	T3	§6.7.17	436	228	T5	§23.4	85	299
T1	§III.38	318	15	T2	§8.4.11	307	87	T3	§6.2.12	392	158	T3	§6.7.18	436	229	T5	§23.5	85	300
T1	§III.39	318	16	T2	§8.4.12	307	88	T3	§6.2.13	392	159	T3	§6.7.19	436	230	T5	§24.1	88	301
T1	§III.40	318	17	T2	§8.4.13	307	89	T3	§6.2.14	392	160	T3	§6.7.20	436	231	T5	§24.2	88	302
T1	§III.41	318	18	T2	§8.4.14	307	90	T3	§6.2.15	392	161	T3	§6.7.21	436	232	T5	§24.3	88	303
T1	§III.42	318	19	T2	§8.4.15	307	91	T3	§6.2.16	392	162	T3	§6.7.22	436	233	T5	§25.1	95	304
T1	§III.43	319	20	T2	§8.5.1	313	92	T3	§6.2.17	392	163	T3	§6.7.23	436	234	T5	§25.2	95	305
T1	§III.44	319	21	T2	§8.5.2	313	93	T3	§6.2.18	392	164	T3	§6.7.24	436	235	T5	§25.3	95	306
T1	§III.45	319	22	T2	§8.5.3	313	94	T3	§6.2.19	392	165	T3	§6.7.25	436	236	T5	§25.4	95	307
T1	§III.46	319	23	T2	§8.5.4	314	95	T3	§6.2.20	392	166	T3	§6.7.26	436	237	T5	§25.5	95	308
T1	§III.47	319	24	T2	§8.5.5	314	96	T3	§6.2.21	392	167	T3	§6.7.27	436	238	T5	§26.1	98	309
T1	§III.48	319	25	T2	§8.5.6	314	97	T3	§6.2.22	392	168	T3	§6.7.28	436	239	T5	§26.2	98	310
T1	§III.49	319	26	T2	§8.5.7	314	98	T3	§6.2.23	392	169	T3	§6.8pp.1	442	240	T5	§26.3	98	311
T1	§III.50	319	27	T2	§8.5.8	314	99	T3	§6.2.24	392	170	T3	§6.8pp.2	442	241	T5	§26.4	98	312
T1	§III.51	319	28	T2	§8.5.9	314	100	T3	§6.2.25	393	171	T3	§6.8.1	443	242	T5	§27.1	101	313
T1	§III.52	319	29	T2	§8.5.10	314	101	T3	§6.2.26	393	172	T3	§6.8.2	443	243	T5	§27.2	101	314
T1	§III.53	319	30	T2	§8.5.11	314	102	T3	§6.2.27	393	173	T3	§6.8.3	443	244	T5	§27.3	101	315
T2	§8.1.1	273	31	T2	§8.5.12	314	103	T3	§6.2.28	393	174	T3	§6.8.4	443	245	T5	§27.4	101	316
T2	§8.1.2	273	32	T2	§8.5.13	314	104	T3	§6.2.29	393	175	T3	§6.8.5	443	246	T5	§28.1	106	317
T2	§8.1.3	273	33	T2	§8.5.14	314	105	T3	§6.2.30	393	176	T3	§6.8.6	443	247	T5	§28.2	106	318
T2	§8.1.4	273	34	T3	§6.1pp.1	382	106	T3	§6.2.31	393	177	T3	§6.8.7	443	248	T5	§28.3	106	319
T2	§8.1.5	273	35	T3	§6.1pp.2	382	107	T3	§6.2.32	393	178	T3	§6.8.8	443	249	T5	§28.4	106	320
T2	§8.1.6	273	36	T3	§6.1pp.3	382	108	T3	§6.2.33	393	179	T3	§6.8.9	443	250	T5	§28.5	106	321
T2	§8.1.7	273	37	T3	§6.1pp.4	382	109	T3	§6.2.34	393	180	T3	§6.8.10	443	251	T5	§28.6	106	322
T2	§8.1.8	273	38	T3	§6.1.1	382	110	T3	§6.2.35	393	181	T3	§6.8.11	443	252	T5	§29.1	109	323
T2	§8.1.9	273	39	T3	§6.1.2	382	111	T3	§6.2.36	393	182	T3	§6.8.12	443	253	T5	§29.2	109	324
T2	§8.1.10	273	40	T3	§6.1.3	382	112	T3	§6.3pp.1	400	183	T3	§6.8.13	443	254	T5	§29.3	109	325
T2	§8.1.11	274	41	T3	§6.1.4	382	113	T3	§6.3.1	400	184	T3	§6.8.14	443	255	T5	§29.4	109	326
T2	§8.1.12	274	42	T3	§6.1.5	382	114	T3	§6.3.2	400	185	T3	§6.8.15	443	256	T5	§29.5	109	327
T2	§8.1.13	274	43	T3	§6.1.6	382	115	T3	§6.3.3	400	186	T3	§6.8.16	443	257	T5	§30.1	113	328
T2	§8.1.14	274	44	T3	§6.1.7	382	116	T3	§6.3.4	400	187	T4	§7.25	257	258	T5	§30.2	113	329
T2	§8.1.15	274	45	T3	§6.1.8	382	117	T3	§6.3.5	400	188	T4	§7.26	257	259	T5	§30.3	113	330
T2	§8.1.16	274	46	T3	§6.1.9	382	118	T3	§6.3.6	400	189	T4	§7.27	257	260	T5	§30.4	113	331
T2	§8.1.17	274	47	T3	§6.1.10	382	119	T3	§6.3.7	400	190	T4	§7.28	257	261	T5	§30.5	113	332
T2	§8.2.1	286	48	T3	§6.1.11	382	120	T3	§6.3.8	400	191	T4	§7.29	257	262	T5	§31.1	114	333
T2	§8.2.2	286	49	T3	§6.1.12	382	121	T3	§6.3.9	400	192	T4	§7.30	257	263	T5	§31.2	114	334
T2	§8.2.3	286	50	T3	§6.1.13	382	122	T3	§6.3.10	400	193	T4	§7.31	257	264	T5	§31.3	114	335
T2	§8.2.4	286	51	T3	§6.1.14	382	123	T3	§6.3.11	400	194	T4	§7.32	257	265	T5	§31.4	114	336
T2	§8.2.5	286	52	T3	§6.1.15	382	124	T3	§6.3.12	400	195	T4	§7.33	257	266	T5	§32.1	116	337
T2	§8.2.6	287	53	T3	§6.1.16	382	125	T3	§6.3.13	401	196	T4	§7.34	258	267	T5	§32.2	116	338
T2	§8.2.7	287	54	T3	§6.1.17	382	126	T3	§6.3.14	401	197	T4	§7.35	258	268	T5	§32.3	116	339
T2	§8.2.8	287	55	T3	§6.1.18	382	127	T3	§6.3.15	401	198	T4	§7.36	258	269	T5	§32.4	116	340
T2	§8.2.9	287	56	T3	§6.1.19	382	128	T3	§6.3.16	401	199	T4	§7.37	258	270	T5	§32.1	117	341
T2	§8.2.10	287	57	T3	§6.1.20	382	129	T3	§6.3.17	401	200	T4	§7.38	258	271	T5	§32.2	117	342
T2	§8.2.11	287	58	T3	§6.1.21	383	130	T3	§6.3.18	401	201	T4	§7.39	258	272				
T2	§8.2.12	287	59	T3	§6.1.22	383	131	T3	§6.3.19	401	202	T4	§7.40	258	273				
T2	§8.2.13	287	60	T3	§6.1.23	383	132	T3	§6.3.20	401	203	T4	§7.41	259	274				
T2	§8.2.14	287	61	T3	§6.1.24	383	133	T3	§6.3.21	401	204	T4	§7.42	259	275				
T2	§8.2.15	287	62	T3	§6.1.25	383	134	T3	§6.3.22	401	205	T4	§7.43	259	276				
T2	§8.2.16	287	63	T3	§6.1.26	383	135	T3	§6.3.23	401	206	T4	§7.44	259	277				
T2	§8.2.17	288	64	T3	§6.1.27	383	136	T3	§6.3.24	401	207	T4	§7.45	259	278				
T2	§8.3.1	295	65	T3	§6.1.28	383	137	T3	§6.3.25	401	208	T4	§7.46	259	279				
T2	§8.3.2	295	66	T3	§6.1.29	383	138	T3	§6.3.26	401	209	T4	§7.47	260	280				
T2	§8.3.3	295	67	T3	§6.1.30	383	139	T3	§6.7pp.1	435	210	T4	§7.48	260	281				
T2	§8.3.4	296	68	T3	§6.1.31	383	140	T3	§6.7pp.2	435	211	T4	§7.49	260	282				
T2	§8.3.5	296	69	T3	§6.1.32	383	141	T3	§6.7.1	435	212	T4	§7.50	260	283				
T2	§8.3.6	296	70	T3	§6.1.33	383	142	T3	§6.7.2	435	213	T4	§7.51	260	284				
T2	§8.3.7	296	71	T3	§6.1.34	383	143	T3	§6.7.3	435	214	T4	§7.52	260	285				

Fuente: elaboración propia

6.8. Matriz de demandas

Tabla 7. 9. Matriz de demandas cognitivas. Ejercicios 1-130

EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
1	1	1	0	1	0	0	0	0	66	1	1	0	1	1	0	0	0
2	1	1	1	1	1	0	0	0	67	1	1	0	1	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	1	1	0	68	0	1	0	1	1	1	1	0
4	1	1	1	0	0	0	0	0	69	0	1	0	1	1	1	1	0
5	1	1	0	1	1	0	0	1	70	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	0	0	0	71	0	1	0	1	1	1	1	0
7	1	1	0	1	0	0	0	0	72	1	1	0	1	1	1	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0	0	73	1	1	0	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	0	0	0	74	1	1	0	1	1	1	1	0
10	0	1	0	1	1	1	1	1	75	0	1	0	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	0	0	0	76	1	1	0	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	0	0	0	77	1	1	0	1	1	0	0	0
13	0	1	0	1	1	1	1	1	78	1	1	0	1	1	1	0	0
14	1	1	0	1	1	0	0	0	79	1	1	1	1	1	1	1	1
15	0	1	0	1	1	1	1	1	80	1	1	1	1	1	1	1	1
16	0	1	0	1	1	1	1	1	81	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	0	1	1	1	0	0	82	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	0	1	0	0	0	0	83	1	1	0	1	1	1	1	1
19	0	1	0	1	1	1	0	0	84	1	1	0	1	0	0	0	0
20	1	1	0	1	1	0	0	0	85	0	1	0	1	1	1	1	0
21	1	1	1	1	0	0	0	0	86	0	1	0	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	0	0	0	0	87	0	1	0	1	1	1	1	1
23	1	1	0	1	0	0	0	0	88	1	1	1	1	1	1	1	1
24	0	1	0	1	1	0	0	1	89	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	0	0	0	0	0	0	90	1	1	1	1	1	1	0	0
26	1	1	0	0	0	0	0	0	91	1	1	1	1	1	1	1	1
27	1	1	0	1	0	0	0	0	92	1	1	0	1	0	0	0	0
28	1	1	0	1	0	0	0	0	93	1	1	0	1	1	0	0	0
29	1	1	0	1	0	0	0	0	94	1	1	0	1	0	0	0	0
30	1	1	1	1	1	0	0	0	95	1	1	0	1	0	0	0	0
31	0	1	0	1	1	1	1	1	96	1	1	0	1	1	0	0	0
32	0	1	0	1	1	1	1	1	97	0	1	0	1	1	1	1	0
33	1	1	0	1	1	1	1	1	98	0	1	0	1	1	1	1	0
34	1	1	0	1	1	1	1	1	99	0	1	0	1	1	1	1	0
35	1	1	0	1	1	0	0	0	100	0	1	0	1	1	1	0	0
36	1	1	1	1	1	1	0	1	101	0	1	0	1	1	1	1	0
37	0	1	0	1	1	1	1	1	102	0	1	0	1	1	1	1	0
38	1	1	1	1	1	0	0	0	103	0	1	0	1	1	1	1	0
39	1	1	1	1	1	1	1	0	104	0	1	0	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	0	0	0	0	105	0	1	0	1	1	1	1	0
41	1	1	1	1	1	1	1	0	106	1	0	0	0	0	0	0	0
42	0	1	0	1	1	1	1	1	107	1	0	0	0	0	0	0	0
43	0	1	0	1	1	1	1	1	108	1	0	0	0	0	0	0	0
44	0	1	0	1	1	1	1	1	109	1	1	0	1	0	0	0	0
45	1	1	0	1	1	1	1	1	110	1	0	0	0	0	0	0	0
46	0	1	0	1	1	1	1	1	111	1	0	0	0	0	0	0	0
47	1	1	1	1	1	1	1	1	112	1	0	0	0	0	0	0	0
48	1	1	0	1	0	0	0	0	113	1	0	0	0	0	0	0	0
49	1	1	0	1	0	0	0	0	114	1	0	0	0	0	0	0	0
50	1	1	0	1	0	0	0	0	115	1	0	0	0	0	0	0	0
51	0	1	0	1	1	1	1	0	116	1	0	0	0	0	0	0	0
52	0	1	0	1	1	1	1	0	117	1	0	0	0	0	0	0	0
53	1	1	1	1	1	0	0	0	118	1	0	0	0	0	0	0	0
54	1	1	1	1	1	1	1	1	119	1	0	0	0	0	0	0	0
55	1	1	1	1	0	0	0	0	120	1	0	0	0	0	0	0	0
56	1	1	0	1	1	0	0	0	121	1	0	0	0	0	0	0	0
57	1	1	0	1	1	1	0	0	122	1	0	0	0	0	0	0	0
58	0	1	0	1	1	1	1	0	123	1	0	0	0	0	0	0	0
59	0	1	0	1	1	1	1	0	124	1	0	0	0	0	0	0	0
60	1	1	1	1	1	1	1	1	125	1	0	0	0	0	0	0	0
61	1	1	0	1	1	1	1	0	126	1	0	0	0	0	0	0	0
62	1	1	1	1	1	1	1	1	127	1	0	0	0	0	0	0	0
63	1	1	1	1	1	1	1	1	128	1	1	0	1	1	0	0	0
64	1	1	0	1	1	1	1	0	129	1	1	0	1	1	0	0	0
65	1	1	0	1	0	0	0	0	130	0	1	0	1	0	0	0	0

Tabla 7. 9. Matriz de demandas cognitivas. Ejercicios 131-260

EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
131	1	0	1	1	1	0	0	0	196	1	1	0	1	0	0	0	0
132	1	0	0	0	1	0	0	0	197	1	1	0	1	0	0	0	0
133	1	1	1	1	0	0	0	0	198	1	1	0	1	0	0	0	0
134	1	0	1	1	0	0	0	0	199	1	1	0	1	0	0	0	0
135	1	1	1	1	0	0	0	0	200	1	1	0	1	0	0	0	0
136	1	1	0	1	0	0	0	0	201	1	1	0	1	0	0	0	0
137	1	1	0	1	1	0	0	0	202	1	1	0	1	1	0	0	0
138	1	1	0	1	1	1	0	0	203	1	1	0	1	1	0	0	0
139	1	1	0	1	1	1	0	0	204	1	1	0	1	1	0	0	0
140	1	0	0	1	1	1	0	0	205	1	1	0	1	1	1	0	0
141	1	0	0	1	1	0	0	1	206	1	1	0	1	1	1	0	0
142	1	0	0	1	1	0	0	1	207	1	1	0	1	1	1	0	0
143	1	1	0	1	1	0	0	1	208	1	0	0	0	0	0	0	0
144	1	0	0	0	0	0	0	0	209	1	0	0	0	0	0	0	0
145	1	0	0	0	0	0	0	0	210	1	1	0	0	0	1	1	0
146	1	0	0	0	0	0	0	0	211	1	1	0	0	0	1	1	0
147	1	0	0	0	0	0	0	0	212	1	0	0	1	0	0	0	0
148	1	0	0	0	0	0	0	0	213	1	1	0	0	0	0	0	0
149	1	0	0	0	0	0	0	0	214	1	0	0	0	0	0	0	0
150	1	0	0	0	0	0	0	0	215	1	0	0	0	0	0	0	0
151	1	0	0	0	0	0	0	0	216	1	0	0	0	0	0	0	0
152	1	0	0	0	0	0	0	0	217	1	0	0	0	0	0	0	0
153	1	0	0	0	0	0	0	0	218	1	0	0	0	0	0	0	0
154	1	0	0	0	0	0	0	0	219	1	0	0	0	0	0	0	0
155	1	0	0	0	0	0	0	0	220	1	1	0	1	0	0	0	0
156	1	0	0	0	0	0	0	0	221	1	1	0	1	0	0	0	0
157	1	0	0	1	0	0	0	0	222	1	1	0	1	0	0	0	0
158	1	0	0	1	0	0	0	0	223	1	1	0	1	0	0	0	0
159	1	0	0	1	0	0	0	0	224	1	1	0	1	0	0	0	0
160	1	0	0	1	0	0	0	0	225	1	1	0	1	0	0	0	0
161	1	0	0	1	0	0	0	0	226	1	1	0	1	0	1	1	0
162	1	0	0	1	0	0	0	0	227	1	1	0	1	0	1	1	0
163	1	0	0	1	0	0	0	0	228	1	1	0	1	0	1	1	0
164	1	0	0	1	0	0	0	0	229	1	1	0	1	0	1	1	0
165	1	0	0	1	0	0	0	0	230	1	1	0	1	0	1	1	0
166	1	0	0	1	0	0	0	0	231	1	1	0	1	0	1	1	0
167	1	0	0	1	0	0	0	0	232	1	0	0	0	0	0	0	0
168	1	0	0	1	0	0	0	0	233	1	0	0	0	0	0	0	0
169	1	1	0	1	1	0	0	0	234	1	0	0	0	0	0	0	0
170	1	1	0	1	1	0	0	0	235	1	0	0	0	0	0	0	0
171	0	1	0	1	1	0	0	0	236	1	1	0	1	0	0	0	0
172	0	1	0	1	1	0	0	0	237	1	1	0	1	0	0	0	0
173	0	1	0	1	1	0	0	0	238	1	1	0	1	0	0	0	0
174	0	1	0	1	1	0	0	0	239	1	1	0	1	0	0	0	0
175	0	1	0	1	1	0	0	0	240	1	0	0	0	0	0	0	0
176	0	1	0	1	1	0	0	0	241	1	0	0	0	0	0	0	0
177	1	1	1	1	1	0	0	0	242	1	1	1	1	0	0	0	0
178	1	1	0	1	1	0	0	0	243	1	1	1	1	1	0	0	0
179	0	1	0	1	1	1	0	0	244	1	0	0	1	0	0	0	0
180	0	1	0	1	1	1	0	0	245	1	1	1	1	0	0	0	0
181	1	0	0	0	0	0	0	0	246	1	0	0	0	0	0	0	0
182	1	1	0	1	1	0	0	0	247	1	0	0	0	0	0	0	0
183	1	0	0	1	0	0	0	0	248	1	0	0	0	0	0	0	0
184	1	0	0	0	0	0	0	0	249	1	0	0	1	0	0	0	0
185	1	0	0	0	0	0	0	0	250	1	0	0	1	0	0	0	0
186	1	0	0	0	0	0	0	0	251	1	0	0	1	0	0	0	0
187	1	0	0	0	0	0	0	0	252	1	0	0	1	1	0	0	0
188	1	0	0	0	0	0	0	0	253	1	0	0	1	1	0	0	0
189	1	0	0	0	0	0	0	0	254	1	1	0	1	1	0	0	0
190	1	0	0	0	0	0	0	0	255	1	1	0	1	1	0	0	0
191	1	0	0	0	0	0	0	0	256	1	1	0	1	1	0	0	0
192	1	0	0	0	0	0	0	0	257	1	1	1	1	0	0	0	0
193	1	0	0	0	0	0	0	0	258	1	1	0	1	0	0	0	0
194	1	1	0	1	0	0	0	0	259	1	1	0	1	0	0	0	0
195	1	1	0	1	0	0	0	0	260	1	1	0	1	1	0	0	0

Tabla 7. 9. Matriz de demandas cognitivas. Ejercicios 261-342																	
EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	EN	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
261	1	1	0	1	1	1	1	0	302	0	1	1	1	1	0	0	0
262	1	1	0	1	1	1	1	0	303	0	1	1	1	1	0	0	0
263	1	1	0	1	1	1	0	0	304	0	1	1	1	1	1	0	0
264	0	1	0	1	1	1	1	0	305	1	1	0	1	1	0	0	0
265	0	1	0	1	1	1	1	0	306	1	1	1	1	1	1	1	1
266	0	1	0	1	1	1	1	0	307	1	1	1	1	1	1	1	1
267	0	1	0	1	1	1	1	0	308	0	1	1	1	1	1	1	0
268	0	1	0	1	1	1	1	0	309	1	1	1	1	1	1	0	0
269	0	1	0	1	1	1	1	1	310	1	1	1	1	1	1	0	0
270	0	1	0	1	1	1	1	1	311	1	1	1	1	1	1	0	0
271	0	1	0	1	1	1	1	0	312	0	1	1	1	1	1	0	0
272	0	1	0	1	1	1	1	1	313	0	1	1	1	1	1	1	1
273	0	1	0	1	1	1	1	1	314	0	1	1	1	1	1	1	0
274	1	1	0	1	0	0	0	0	315	0	1	1	1	1	1	1	1
275	0	1	0	1	1	1	1	0	316	0	1	1	1	1	1	1	0
276	0	1	0	1	1	1	1	0	317	0	1	1	1	1	1	1	0
277	0	1	0	1	1	1	1	0	318	0	1	1	1	1	1	1	0
278	0	1	0	1	1	1	1	0	319	0	1	1	1	1	1	1	1
279	0	1	0	1	1	1	1	0	320	0	1	1	1	1	1	1	0
280	1	1	0	1	0	0	0	0	321	0	1	1	1	1	1	1	1
281	1	1	1	1	0	0	0	0	322	0	1	1	1	1	1	1	1
282	1	1	1	1	0	0	0	0	323	0	1	1	1	1	1	1	0
283	1	0	1	0	0	0	0	0	324	0	1	1	1	1	1	1	0
284	1	0	1	0	0	0	0	0	325	1	0	0	1	0	0	0	0
285	1	0	1	0	0	0	0	0	326	1	0	0	1	0	0	0	0
286	1	0	1	0	0	0	0	0	327	0	1	1	1	1	1	1	0
287	1	0	1	0	0	0	0	0	328	0	1	1	1	1	1	1	1
288	1	0	1	1	0	0	0	0	329	0	1	1	1	1	1	1	0
289	1	0	1	1	0	0	0	0	330	0	1	1	1	1	1	1	0
290	1	1	1	1	0	0	0	0	331	0	1	1	1	1	1	1	1
291	0	1	0	1	1	1	0	0	332	0	1	1	1	1	1	1	0
292	0	1	0	1	1	1	0	0	333	0	1	1	1	1	1	1	1
293	0	1	0	1	1	1	0	0	334	0	1	1	1	1	1	1	1
294	0	1	0	1	1	1	0	0	335	0	1	1	1	1	1	1	1
295	0	1	0	1	1	1	0	0	336	0	1	1	1	1	1	1	1
296	0	1	1	1	1	1	0	0	337	0	1	1	1	1	1	1	1
297	0	1	1	1	1	1	0	0	338	1	1	1	1	1	1	0	0
298	0	1	1	1	1	1	1	0	339	0	1	1	1	1	1	1	1
299	0	1	1	1	1	1	1	1	340	0	1	1	1	1	1	1	1
300	1	1	1	1	1	1	1	1	341	1	1	1	1	1	1	1	1
301	0	1	1	1	1	0	0	0	342	1	1	1	1	1	1	1	1

Fuente: elaboración propia